PROBLEME

Notions générales sur les applications - Compléments de cours

Soit $f : A \longrightarrow B$ une application définie sur A et à valeurs dans B.
Définition de l'injectivité :
On dit que f est **injective** si

pour tout $b \in B$, l'équation $f(x) = b$ admet **au plus** une solution x **dans l'ensemble** A

On verra, dans le courant de l'année, d'autres caractérisations des fonctions injectives.
Définition de la surjectivité :
On dit que f est **surjective** si

pour tout $b \in B$, l'équation $f(x) = b$ admet **au moins** une solution x **dans l'ensemble** A

Définition de la bijectivité :
On dit que f est **bijective** (ou f est **une bijection**) si

pour tout $b \in B$, l'équation $f(x) = b$ admet exactement **une et une seule** solution **dans l'ensemble** A

Ainsi : f est **bijective** si et seulement si f est **injective et surjective**.
Définition d'un antécédent :
Si $b \in B$ et $x \in A$ vérifient $f(x) = b$, on dit que x est **un antécédent** de b par la fonction f. Ainsi, si $b \in f(A)$ (voir définition ci-dessous), cet élément possède, par construction, au moins un antécédent dans A par f !
Définition de l'image directe d'un ensemble :
Soit $X \subset A$ une partie de A, on définit l'ensemble $f(X)$, dit **image** (directe) de X par f comme l'ensemble des images des éléments de X par f. On a

$$f(X) = \{f(x), x \in X\}$$

Ainsi : $f(X)$ est l'ensemble de tous les éléments de la forme $f(x)$ pour x parcourant l'ensemble X.
On a donc

$$y \in f(X) \ \underline{\text{si et seulement si}}\ y \text{ peut s'écrire sous la forme } y = f(x) \text{ avec un } x \in X$$

En d'autres termes, $y \in f(X)$ si et seulement si y admet un antécédent dans X par f.
Définition de l'image réciproque d'un ensemble :
Soit $Y \subset B$ une partie de B, on définit l'ensemble $f^{-1}(Y)$, dit **image réciproque** de Y par f, comme l'ensemble des éléments x de A tels que $f(x)$ soit dans Y. On a

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A,\ f(x) \in Y\}$$

Ainsi $f^{-1}(Y)$ est l'ensemble de tous les x de A dont l'image $f(x)$ est dans l'ensemble Y.
On a donc

$$x \in f^{-1}(Y) \ \underline{\text{si et seulement si}}\ f(x) \in Y$$

En d'autres termes, $f^{-1}(Y)$ est l'ensemble des antécédents, par f, des éléments de l'ensemble Y.
Quelques rappels : comment prouver l'inclusion ou l'égalité de deux ensembles
Soit A et B, deux ensembles.

- Prouver l'inclusion $A \subset B$: cela revient à montrer que, pour tout élement x de A, on a forcément $x \in B$. Autrement dit :
$$(A \subset B) \Leftrightarrow (\forall x \in A,\ x \in B).$$
- Prouver l'égalité $A = B$: cela peut se traduire par double inclusion. Ainsi, on montre d'abord $A \subset B$ (en vérifiant que, pour tout $x \in A$, on a bien $x \in B$) puis $B \subset A$ (en vérifiant que, pour tout $y \in B$, on a bien $y \in A$).
Il est parfois possible de montrer l'égalité des ensembles par équivalence :
$$(x \in A) \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow (x \in B).$$
Dans ce cas, on a bien prouvé l'égalité d'ensemble $A = B$.

Un exemple :

L'application $f : \left| \begin{array}{c} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z^2 + z + 1 \end{array} \right.$ n'est pas injective. En effet l'équation $f(z) = 1$ (qui équivaut à $z^2 + z = 0$) admet deux solutions $z = 0$ et $z = -1$. L'élément $b = 1$ a donc deux antécédents par f. Elle est surjective car l'équation $f(z) = b$ admet, selon la nullité ou pas de $\Delta = 1 - 4(1-b)$, une ou deux racines dans $\mathbb{C}$ (donc toujours au moins une).

Pour f, on a $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ (les images des réels sont réels), mais $f(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$. En effet, si $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geqslant \frac{3}{4}$ (tout réel strictement inférieur à $\frac{3}{4}$ ne peut pas être dans $f(\mathbb{R})$).

Par ailleurs, avec cette décomposition, il est aisé de prouver $f(\mathbb{R}) = [\frac{3}{4}, +\infty[$.

Pour la détermination de $f^{-1}(\mathbb{R})$, on cherche les $z \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) \in \mathbb{R}$. Or

$$\begin{aligned}
z^2 + z + 1 = f(z) \in \mathbb{R} &\iff z^2 + z + 1 = \overline{z}^2 + \overline{z} + 1 \iff z^2 - \overline{z}^2 + z - \overline{z} = 0 \\
&\iff (z - \overline{z})(z + \overline{z} + 1) = 0 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{c} z = \overline{z} \text{ i.e } z \in \mathbb{R} \\ \text{ou } z + \overline{z} = -1 \text{ i.e } \operatorname{Re}(z) = -\dfrac{1}{2} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Ainsi $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \mathcal{D}$ où $\mathcal{D}$ est la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

Exercice 1

1. On considère la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1} \end{array} \right.$.
   (a) Etudier les variations de f. Résumer ces résultats dans un tableau, limites aux bords comprises.
   (b) Montrer l'existence de trois constantes réelles a, b et c telles que :
   $$\forall x \in D = \mathbb{R} \setminus \{1\},\ f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}.$$
   Prouver l'existence de deux droites asymptotes pour la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f.
   (c) Si $\mathcal{C}_f$ possède un centre de symétrie Ω, quelles peuvent être ses coordonnées ? Prouver alors que $\mathcal{C}_f$ possède un centre de symétrie.
   (d) Représenter l'allure de sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormal.

(e) La fonction f présente deux extremums locaux d'abscisses α et β (avec $\alpha < \beta$) : déterminer leurs valeurs et simplifier $f(\alpha)$ et $f(\beta)$.

2. (a) Soit $m \in \mathbb{R}$: déterminer, en fonction de m, le **nombre** de solutions de l'équation
$$«f(x) = m».$$
   (b) L'application $f : D = \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ est-elle surjective ? Injective ? Bijective ?
   (c) En s'aidant de la représentation graphique de f, déterminer les images directes suivantes :
$$f([\beta, +\infty[) = ? \quad f(]1, +\infty[) = ? \quad f(\mathbb{R}) = ? \quad f([0, 1[) = ?$$
   (d) Même chose pour déterminer les images réciproques suivantes :
$$f^{-1}(\mathbb{R}) = ? \quad f^{-1}([f(\beta), +\infty[) = ? \quad f^{-1}([0, 3]) = ? \quad f^{-1}(\{7\}) = ?$$
3. (a) L'application f établit une bijection, que l'on notera g, de l'intervalle $[\beta, +\infty[$ vers un intervalle I : en s'appuyant sur les résultats établis précédemment, préciser I.
   (b) Pour tout $y \in I$, l'équation $g(x) = y$ possède donc une et une seule solution $x \in [\beta, +\infty[$: calculer sa valeur $x = g^{-1}(y)$ en fonction de y. On dit que l'application $g^{-1} : I \to [\beta, +\infty[$ ainsi construite est la bijection réciproque de $g : [\beta, +\infty[\to I$.
4. (a) L'application f établit une bijection, que l'on notera h, de l'intervalle $]1, \beta]$ vers un intervalle J : en s'appuyant sur les résultats établis précédemment, préciser J.
   (b) Pour tout $y \in J$, l'équation $h(x) = y$ possède donc une et une seule solution $x \in]1, \beta]$: calculer sa valeur $x = h^{-1}(y)$ en fonction de y. On dit que l'application $h^{-1} : J \to]1, \beta]$ ainsi construite est la bijection réciproque de $h :]1, \beta] \to J$.

Exercice 2

Soit f la fonction qui à un complexe z associe, lorsque c'est possible, $f(z) = \dfrac{z^2}{z - 2i}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2.
   (a) Déterminer les racines carrées complexes de $8 - 6i$.
   (b) En déduire tous les antécédents de $1 + i$ par f.
3. Soit h un complexe. Discuter suivant les valeurs de h le nombre d'antécédents de h par f.
4. Déterminer l'image $f(D)$ de D par f. La fonction est-elle une application surjective de D dans $\mathbb{C}$?
5. f est elle une application injective de D dans $\mathbb{C}$?

Exercice 3

Soit f définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, par $f(z) = \dfrac{z - 1}{1 - \overline{z}}$.

1. Montrer que $|f(z)| = 1$. f est-elle surjective ?
2. Résoudre $f(z) = 1$. f est-elle injective ?
3. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$.
4. Résoudre $f(z) = e^{i\theta}$. Préciser $f(\mathbb{C} \setminus \{1\})$.

Exercice

Parties de $\mathbb{C}$ de type S

Une partie $\mathscr{A}$ non vide de $\mathbb{C}$ (ensemble des nombres complexes) est dite de type S, si pour tout $z_1 \in \mathscr{A}$ et $z_2 \in \mathscr{A}$, le produit $z_1 z_2$ et la somme $z_1^2 + z_2^2$ sont encore dans $\mathscr{A}$.
Dans tout le problème, $\mathscr{A}$ désigne une partie de $\mathbb{C}$ de type S.
On note $b(\mathscr{A})$ le nombre de nombres complexes z de $\mathscr{A}$ dont le module $|z|$ est inférieur ou égal à 1.
On note $b(\mathscr{A}) = \infty$ si ce nombre est infini.

Partie A : Quelques exemples simples

1. Les ensembles suivants sont des parties de $\mathbb{C}$ de type S (on ne demande pas de le vérifier), préciser pour chacun d'eux la valeur de $b(\mathscr{A})$:
   (a) $\mathscr{A} = \{0\}$
   (b) $\mathscr{A} = \mathbb{C}$
   (c) $\mathscr{A} = \mathbb{N}$
   (d) $\mathscr{A} = \mathbb{N}^*$
2. (a) Donner une partie $\mathscr{A}$ de type S telle que $b(\mathscr{A}) = 0$.
   (b) Donner une partie $\mathscr{A}$ de type S telle que $b(\mathscr{A}) = 3$.
3. On note $\overline{\mathscr{A}} = \{\overline{z},\, z \in \mathscr{A}\}$, c'est-à-dire la partie de $\mathbb{C}$ constituée des nombres complexes conjugués des éléments de $\mathscr{A}$. Montrer que $\overline{\mathscr{A}}$ est de type S et préciser $b(\overline{\mathscr{A}})$.

Partie B : Deux exemples de parties de $\mathbb{C}$ de type S

1. On définit le complexe j par $j = e^{2i\pi/3} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\sqrt{3}$ et on note $\mathbb{Z}[j] = \left\{x + yj,\, (x, y) \in \mathbb{Z}^2\right\}$, c'est-à-dire la partie de $\mathbb{C}$ constituée de tous les nombres complexes de la forme $x + yj$, avec $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$.
   (a) Calculer $1 + j + j^2$.
   (b) Justifier que $\mathbb{Z}[j]$ est de type S.
   (c) Montrer que $b(\mathbb{Z}[j]) = 7$.
   (d) On note $\mathbb{Z}[j]^* = \mathbb{Z}[j] \setminus \{0\}$ (les éléments non nuls de $\mathbb{Z}[j]$). Justifier que $\mathbb{Z}[j]^*$ est de type S et déterminer $b(\mathbb{Z}[j]^*)$.
2. On définit la partie $\mathscr{R}$ de $\mathbb{C}$ par

$$\mathscr{R} = \left\{z \in \mathbb{C},\, z^2 \in \mathbb{Z}[j]\right\}$$

   Ainsi un nombre complexe z est dans $\mathscr{R}$ si et seulement si son carré est dans $\mathbb{Z}[j]$.
   (a) Montrer que $\mathscr{R}$ est de type S.
   (b) Déterminer $b(\mathscr{R})$.

Partie C : à la recherche des valeurs possibles de $b(\mathscr{A})$

1. On suppose qu'il existe $a \in \mathscr{A}$ tel que $0 < |a| < 1$. Montrer que $b(\mathscr{A}) = \infty$.
2. On considère, dans cette question, un nombre complexe a de module 1. On note $\mathrm{Arg}(a)$ l'unique argument de a inclus dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. On suppose de plus que $\mathrm{Arg}(a)$ n'est ni un multiple de $\dfrac{\pi}{6}$, ni un multiple de $\dfrac{\pi}{4}$.
   (a) Montrer que si $\mathrm{Arg}(a) \in \left]\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{2\pi}{3}\right[$, alors l'un des deux nombres complexes a^2+a^4 ou a^4+a^8 possède un module non nul et strictement inférieur à 1.
   (b) De même montrer que si $\mathrm{Arg}(a) \in \left]0, \dfrac{\pi}{6}\right[$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < |a^{2n}+a^{4n}| < 1$.
   (c) Montrer que si $\mathrm{Arg}(a) \in \left]-\dfrac{2\pi}{3}, 0\right[$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < |a^{2n}+a^{4n}| < 1$.
   (d) Conclure qu'il existe toujours $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < |a^{2n}+a^{4n}| < 1$.
3. On suppose, dans cette question, que $b(\mathscr{A})$ est fini et supérieur ou égal à 2.
   (a) Montrer qu'il existe $a \in \mathscr{A}$ tel que $|a| = 1$.
   (b) Quelles sont alors les valeurs possibles pour $\mathrm{Arg}(a)$?
   (c) En déduire que $b(\mathscr{A}) < 17$.
4. Donner une partie $\mathscr{A}$ de type S telle que $b(\mathscr{A}) = 5$.
5. Donner une partie $\mathscr{A}$ de type S telle que $b(\mathscr{A}) = 9$.
6. Quelles sont les valeurs possibles de $b(\mathscr{A})$?