Exercice 1

1. Sur $\mathbb{R}$, la fonction g est définie par : $g(x) = (x-1)^2 e^{-x}$.

   (a) Etudier les variations de g, dresser son tableau de variations et ses limites aux bords (justifications à l'appui).

   (b) Question indépendante : lorsqu'une fonction est de classe C^2 (ce qui signifie qu'elle est deux fois dérivable et que sa dérivée seconde est continue), on appelle *point d'inflexion* de cette fonction tout point où la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.
   Prouver qu'en un tel point, la courbe est «traversée» par sa tangente.
   Vérifier alors que g possède deux points d'inflexion.

   (c) Tracer l'allure de la courbe représentative de g.

   (d) **A l'aide de cette représentation**, déterminer, suivant la valeur du réel h, le nombre de solutions x de l'équation $g(x) = h$.

2. Pour tout réel λ, on définit la fonction f_λ sur $\mathbb{R}$, de courbe représentative Γ_λ, par :
$$f_\lambda(x) = x + \lambda(x^2+1)e^{-x}.$$

   (a) Montrer que, par tout point du plan, il passe une courbe Γ_λ et une seule.

   (b) Montrer que les courbes Γ_λ, pour λ décrivant $\mathbb{R}$, admettent une droite asymptote commune.

3. (a) Déterminer, suivant la valeur du réel λ, le nombre de points où Γ_λ admet une tangente horizontale.

   (b) Question indépendante : on note $\mathcal{C}$ l'ensemble de ces points. Prouver qu'il est inclus dans une courbe $\mathcal{H}$ d'équation $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont deux polynômes à déterminer.
   A-t-on $\mathcal{C} = \mathcal{H}$?

4. Soit k un nombre réel. Pour tout réel λ, on considère la tangente $T_{\lambda,k}$ à la courbe Γ_λ au point de coordonnées $(k, f_\lambda(k))$.

   (a) Soit A et B, deux constantes. Prouver l'équivalence suivante :
$$(\forall \lambda \in \mathbb{R},\ A\lambda + B = 0) \Leftrightarrow (A = B = 0).$$

   (b) Montrer que, pour k différent d'une valeur k_0 à définir, toutes les droites de la famille $(T_{\lambda,k})_{\lambda\in\mathbb{R}}$ sont concourantes en un point M_k dont on précisera les coordonnées.
   Que peut-on dire si $k = k_0$?

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction dont le graphe $\mathcal{C}_f$ admet deux centres de symétries I et J de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ (avec $a \neq \alpha$).

1. Montrer qu'il existe deux constantes réelles T et V, avec $T \neq 0$, telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x) + V.$$
2. En déduire que f peut s'écrire comme somme d'une fonction périodique et d'une fonction linéaire.
3. Montrer que $\mathcal{C}_f$ possède une infinité de centres de symétrie.
4. On a donc prouvé : « si $\mathcal{C}_f$ possède deux centres de symétrie, alors la fonction f est somme d'une fonction périodique P et d'une fonction linéaire.
   Montrer que, dans ce cas, si f est dérivable, alors la fonction P l'est également et sa dérivée P' possède deux axes de symétrie.
5. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = P(x) + x$ avec $P(x) = \cos(x) + \cos(2x)$.
   (a) Montrer que P est une fonction périodique.
   (b) Prouver l'équivalence :
   $$(\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \cos(2x) + \lambda_3 \sin(x) + \lambda_4 \sin(2x) = 0) \Leftrightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0).$$
   On dit que les fonctions c_1, c_2, s_1 et s_2 sont *linéairement indépendantes*, ou encore que la famille de fonctions (c_1, c_2, s_1, s_2) est **libre** (où $c_1(x) = \cos(x)$, $c_2(x) = \cos(2x)$, $s_1(x) = \sin(x)$ et $s_2(x) = \sin(2x)$).
   (c) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que la fonction P' n'a pas d'axe de symétrie.
   (d) Conclusion ?