Exercice 1 On se propose de chercher pour quels réels x l'égalité suivante est vérifiée :

$$\text{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\text{Arcsin}(x) \quad (E).$$

1. $\boxed{\text{Première méthode}}$

   On pose :

   $$f(x) = \text{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right).$$

   (a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

   (b) Justifier que f admet une parité. On se place désormais sur $D_f \cap [0, +\infty[$.

   (c) Montrer qu'il existe deux réels $a > 0$ et $b > 0$ tels que f soit dérivable sur les intervalles $[0, a[$ et sur $]a, b[$.
   Calculer et simplifier $f'(x)$ sur $[0, a[$ et sur $]a, b[$.

   (d) On pose :

   $$\Delta(x) = \text{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) - 2\text{Arcsin}(x).$$

   Sur quel ensemble D_Δ la fonction Δ est-elle définie ?
   En quels réels x de $[0, +\infty[$ la fonction Δ est-elle dérivable ? Préciser $\Delta'(x)$ dans ce cas.

   (e) Δ est constante sur un intervalle $I \subset [0, +\infty[$: lequel ? Préciser la valeur de la constante.

   (f) Donner une expression simple de $\Delta(x)$ pour $x \in [0, +\infty[\setminus I$, puis pour $x \in D_\Delta$.

   (g) Conclure.

2. $\boxed{\text{Deuxième méthode}}$

   (a) Justifier que, pour tout $x \in D_f$, il existe un et un seul $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $x = \sin(\theta)$.

   (b) Compléter (en le justifiant) :
   - pour tout $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\text{Arcsin}\left(\sin(t)\right) = \ldots$.
   - pour tout $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\text{Arcsin}\left(\sin(t)\right) = \ldots$.
   - pour tout $t \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$, $\text{Arcsin}\left(\sin(t)\right) = \ldots$.

   (c) Simplifier au maximum $f(x) = f\left(\sin(\theta)\right)$ en fonction de θ.

   (d) Conclure.

3. $\boxed{\text{Troisième méthode}}$

   On pose

   $$\alpha = \text{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \quad \text{et} \quad \beta = 2\text{Arcsin}(x).$$

   (a) Montrer $\sin(\alpha) = \sin(\beta)$.

   (b) Conclure.

Exercice 2 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit le Gudermannian de x par
$$gd(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}(t)}.$$

1. Soit f, la fonction définie par $f(x) = \mathrm{Arctan}(e^x)$.
   (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire une expression de $gd(x)$ en fonction de f.
   (c) Justifier, pour $x \in \mathbb{R}$: $e^x = \tan\left(\frac{gd(x)}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.
2. Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right) = \tan\left(\frac{gd(x)}{2}\right),$$
   où la fonction th est définie par $\mathrm{th}(t) = \frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)}$ (pour $t \in \mathbb{R}$).
3. (a) Prouver les relations suivantes, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$\mathrm{sh}(2t) = 2\mathrm{sh}(t)\mathrm{ch}(t) \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}(2t) = \mathrm{ch}^2(t) + \mathrm{sh}^2(t) = 2\mathrm{ch}^2(t) - 1 = 1 + 2\mathrm{sh}^2(t).$$
   (b) Exprimer les sinus, cosinus et tangente (trigonométriques circulaires) de $gd(x)$ en fonction des lignes trigonométriques hyperboliques de x.

Exercice 3 Pour $a \in]0, +\infty[$ avec $a \neq 1$, **le logarithme de base** a est l'application, notée $\log_a$, définie par
$$\log_a : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{array} \right. .$$
Les deux questions sont indépendantes.

1. Pour $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre l'équation d'inconnue a :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\log_{2^k}(a)} = n.$$
2. Pour $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :
$$f_n(x) = \frac{1}{\dfrac{1}{\log_2(x)} + \dfrac{1}{\log_3(x)} + \cdots + \dfrac{1}{\log_n(x)}}.$$
   Tracer l'allure de la courbe représentative de
$$g_n : x \mapsto g_n(x) = (n!)^{f_n(x)}.$$