Exercice 1 On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_n = \int_0^1 x^n \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x.$$

et les fonctions f et g_n par

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad \text{et} \quad g_n(x) = x^n\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Etude du comportement de la suite u

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est parfaitement définie.
2. Calculer u_0 à l'aide du changement de variable $x = \cos\varphi$.
3. Etudier la fonction f sur son ensemble de définition, et en déduire un encadrement simple de $f(x)$ pour $x \in [0, 1]$.
4. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis justifier qu'elle converge en donnant, bien entendu, la valeur de sa limite.

Etude des intégrales de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(\varphi)\mathrm{d}\varphi$.

1. Calculer K_0 et K_1.
2. Montrer, à l'aide d'intégrations par parties :
$$\text{pour tout entier } n \geqslant 2,\ K_n = \frac{n-1}{n}K_{n-2}.$$
3. Donner les valeurs de K_2 et K_3.
4. Prouver qu'il existe une constante C, à préciser, telle que :
$$\text{pour tout entier } n \in \mathbb{N},\ (n+1)K_nK_{n+1} = C.$$

Une relation de récurence pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. A l'aide du changement de variable $x = \cos\varphi$, exprimer u_n à l'aide de K_n et de K_{n+1}.
2. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 0$:
$$u_n + u_{n+1} = \frac{K_n}{n+2}$$
3. Enfin, établir la relation suivante, valable pour tout entier $n \geqslant 2$:
$$(n+1)u_n = -u_{n-1} + (n-1)u_{n-2}.$$
4. Donner les valeurs de u_1, u_2, u_3 et u_4.

Facultatif

1. La méthode qui suit permet d'arriver à la même relation de récurrence sans l'utilisation des intégrales K_n. Mais il y a un problème...lequel ?

   (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$(n+1)u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1-x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x.$$

   (b) En remarquant $x^{n+1} = x^{n-1}(x^2+1-1)$, en déduire que la suite vérifie la relation de récurrence
$$\forall n \geqslant 2, \quad (n+1)u_n = -u_{n-1} + (n-1)u_{n-2}.$$

2. La méthode suivante permet de contourner ce problème.

   (a) Calculer la dérivée de la fonction v avec $v(x) = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{3}{2}}$, et l'exprimer sous la forme $v'(x) = f(x) \times h(x)$ où h est une fonction simple.

   (b) En écrivant u_n sous la forme $u_n = \displaystyle\int_0^1 u(x)v'(x)\mathrm{d}x$, retrouver, à l'aide d'une intégration par parties, la relation de récurrrence établie dans la partie précédente.

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ On définit les fonctions F, G et H par
$$F(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t, \quad G(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad H(x) = \int_{-1}^{x} \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t.$$
Afin de pouvoir conforter l'exactitude des formules obtenues dans les questions suivantes, on donne les valeurs approchées (pour vérification numérique) :

$F(\frac{1}{3}) \approx 0,2160$ et $F(\frac{2}{3}) \approx -0,2510$ et $F(\frac{1}{4}) \approx 0,3145$ et $H(\frac{-1}{2}) \approx -0,3740$ et $H(-2) \approx 0,6142$.

1. Donner les domaines de définition D_F, D_G et D_H des fonctions F, G et H.

2. A l'aide d'une intégration par parties, donner une relation simple entre $F(x)$, $G(x)$ et $\ln(x)\ln(1-x)$.

3. A l'aide d'un changement de variable affine, donner une relation simple entre $F(1-x)$ et $G(x)$. En déduire une expression de $F(x) + F(1-x)$.

4. <u>Dérivées et variations</u>

   (a) Justifier que F, G et H sont dérivables sur leur ensemble de définition et calculer leur dérivée. Préciser les variations de F, G et H (on ne cherchera pas à déterminer les limites aux bords).

   (b) Montrer que pour $t \in [\frac{1}{2}, 1[$, $0 \leqslant \ln(t) + 2(1-t)$.

   (c) En déduire, pour $x \in D_G$ et $x \geqslant \dfrac{1}{2}$: $1 - 2x \leqslant G(x)$.

(d) Montrer que G admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures. On admet [1] que cette limite vaut $-\dfrac{\pi^2}{12}+\dfrac{\ln^2(2)}{2}$.

(e) En déduire que F a une limite en 1^- et en 0^+ et préciser leur valeur.

5. Soit Φ définie par $\Phi(x) = F\left(\dfrac{x}{x-1}\right) + H(x)$.

   (a) Quelle est le domaine de définition de Φ ?

   (b) Justifier que Φ est dérivable sur son domaine de définition et calculer Φ'.

   (c) Reconnaître la dérivée de Φ et en déduire Φ.

6. Etablir, pour tout $x \in D_H$: $H(x) + H\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{2}\ln^2(-x)$.

   Indications : commencer par simplifier $1 - \dfrac{x}{x-1}$ et se souvenir que $(a-b)^2 = \cdots$

7. Soit ψ définie par $\psi(x) = F(x) + H(-x) - \dfrac{1}{2}F(x^2)$.

   (a) Donner le domaine de définition de ψ.

   (b) Justifier que ψ est dérivable sur son domaine de définition, calculer ψ' et en déduire ψ. On se souviendra que l'on connaît les limites de F aux bords.

8. A l'aide des différentes relations obtenues entre F et H, calculer

$$F\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \text{ et } F\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right).$$

   et en déduire, si $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or,

$$\int_{\frac{1}{\varphi}}^{\frac{1}{\varphi^2}} \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{\varphi}}^{\frac{1}{\varphi^2}} \frac{\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{30}.$$

1. Ce résultat s'obtient facilement avec les théorèmes disponibles dans le cours de seconde année.