Exercice 1 «$\mathrm{DL}_n(a)$» signifie «développement limité d'ordre n au point a».

1. Donner le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto g(x) = \sqrt{1 + \mathrm{sh}\,(x)}$.
2. Donner le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto h(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{1 + \mathrm{e}^x}$.
3. Pour tout paramètre k réel, on définit la fonction f_k par : $f_k\,(x) = g\,(x) + kh\,(x)$.
   Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de f_k.
4. On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de f_k dans un repère orthonormé.
   (a) Donner une équation de T_k, tangente à $\mathcal{C}_k$ au point d'abscisse 0.
   (b) Montrer que, pour k parcourant $\mathbb{R}$, toutes les droites T_k sont concourantes en un point dont on déterminera les coordonnées.
5. Déterminer, en fonction de k, la position locale au voisinage de 0 de $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{T}_k$: illustrer ces différentes situations par un schéma clair.
6. (a) Déterminer les primitives de la fonction h.
   (b) Existe-t-il $k \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x = 0$?

Exercice 2 Soit $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}\mathrm{Arctan}\,(x)$, de courbe représentative $\mathcal{C}$.

1. Donner D_f, le domaine de définition de la fonction f.
2. Calculer les limites de f à tous les bords de D_f.
3. Déterminer toutes les droites asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$. Préciser également leurs positions (locales) relatives avec $\mathcal{C}$: résumer ces résultats sur un schéma clair.

Exercice 3 On pose, pour tout $x \in I =]-1, +\infty[$:

$$\begin{cases} f(x) &= \dfrac{\ln(1+x) - x\cos(x) + \sin(x)}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \\ f(0) &= \alpha \end{cases}.$$

Montrer qu'il est possible de choisir α pour que f soit continue en 0, et que, dans ce cas, f est dérivable en 0.

Préciser la tangente et l'allure locale de la courbe représentative de f au voisinage de $x = 0$.

Exercice 4 On considère l'équation différentielle (E) :

$$\text{« } |x|y'(x) - (x+1)y(x) = x^2 \text{ »}$$

1. (a) Résoudre l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $I_1 =]-\infty, 0[$.

   (b) Montrer que, parmi ces solutions, il y en a une et une seule qui possède une limite finie en 0. On note y_1 cette solution.

   (c) Déterminer le développement limité d'ordre 2 de $y_1(x)$ en $x = 0^-$ (au voisinage de 0 à gauche).

2. (a) Résoudre l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $I_2 =]0, +\infty[$.
   On note y_2 les solutions, décrites à l'aide du paramètre réel k.

   (b) Vérifier que toutes les fonctions y_2 possèdent un développement limité d'ordre 2 en $x = 0^+$ (au voisinage de 0 à droite), et le déterminer.

3. On note f_k, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = \begin{cases} y_1(x) & \text{si } x < 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0 \\ y_2(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Montrer qu'il existe un et un seul choix de α pour lequel f_k est continue sur $\mathbb{R}$.
   Dans ce cas, pour quelles valeurs de k la fonction f_k est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
   L'équation différentielle (E) possède-t-elle une solution sur l'ensemble $\mathbb{R}$?
   Si oui, tracer l'allure locale, au voisinage de $x = 0$, d'une telle fonction solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.