Exercice **ENTRAÎNEMENT PERSONNEL**

Déterminer les solutions $y : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & y(t) \end{array} \right.$ de chacune des équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y' + y = t + 1 + e^t$.
2. $y'' - 4y' + 3y = \mathrm{sh}(3t)$.
3. $y'' - 2y' + 5y = te^t$.
4. $y'' + 4y' + 4y = \sin^2(t)$.
5. $y'' + 3y = e^{-t}\cos(2t)$.
6. $y'' + 4y' + 13y = t^2 e^{-t}$.
7. $2y'' + 2y' + y = 4\sin(t)$ avec $y(0) = y'(0) = 0$.
8. $y'' + y = e^{-|t|}$.

PROBLEME

1. On se propose de résoudre, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, l'équation différentielle suivante :
$$\boxed{(E) \text{ « } x^2.y''(x) - xy'(x) + y(x) = 2x \text{ »}}.$$
Deux méthodes vous sont proposées.

***** $1^{\text{ère}}$ méthode *(changement de fonction)* *****

   (a) Montrer que l'équation homogène associée
$$\boxed{(EH) \text{ « } x^2.y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0 \text{ »}}$$
possède une solution sous la forme $y(x) = x^a$, où a est une constante que l'on déterminera.

   (b) On pose, pour tout $x \in]0, +\infty[$: $f(x) = x^a g(x)$.
Montrer que f est solution de (E) si, et seulement si g' (dérivée de g) est solution de l'équation différentielle (F) suivante :
$$\boxed{(F) \text{ « } xy'(x) + y(x) = \frac{2}{x} \text{ »}}.$$

   (c) Résoudre l'équation (F) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

   (d) Conclure.

***** 2^{nde} méthode *(changement de variable)* *****

Si y est une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, on définit la fonction z sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in]0, +\infty[,\ y(x) = z(\ln x), \text{ autrement dit } \forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = y(e^t).$$

   (a) Montrer que y est solution de (E) sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (G) suivante
$$\boxed{(G) \text{ « } z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 2e^t \text{ »}}.$$

   (b) Résoudre cette équation différentielle (G) sur $\mathbb{R}$.

   (c) Conclure.

2. Les solutions de (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$ peuvent-elles se prolonger en une fonction continue en 0 ? Si oui, une solution ainsi prolongée est-elle dérivable en 0 ? Que peut-on en conclure ?

3. On se propose maintenant de déterminer toutes les fonctions f vérifiant le problème suivant, noté (P) :

   (P) $\boxed{\text{«}f \text{ est définie et dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et, pour tout } x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) - 1\text{»}}$.

   Soit f, une solution de ce problème (P).

   (a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$.

   (b) Montrer que f est une solution de l'équation différentielle (E).

   (c) Conclure.

$$y_8(t) = \left\{\begin{array}{lll} A\cos(t) + B\sin(t) + \frac{1}{2}e^{-t} & \text{si} & t \geqslant 0 \\ A\cos(t) + (B-1)\sin(t) + \frac{1}{2}e^{t} & \text{si} & t < 0 \end{array}\right.$$

$$y_7(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(\frac{8}{5}\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{16}{5}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) - \frac{8}{5}\cos(t) - \frac{84}{5}\sin(t)$$

$$y_6(t) = \left(\frac{1}{10}t^2 - \frac{2}{50}t - \frac{3}{250}\right)e^{-t} + e^{-2t}\left(A\cos(3t) + B\sin(3t)\right)$$

$$y_5(t) = -\frac{1}{4}e^{-t}\sin(2t) + A\cos\left(\sqrt{3}t\right) + B\sin\left(\sqrt{3}t\right)$$

$$y_3(t) = e^t\left(A\cos(2t) + B\sin(2t)\right) + \frac{1}{4}te^t,\ y_4(t) = Ate^{-2t} + Be^{-2t} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16}\sin(2t)$$

$$y_1(t) = t + \frac{1}{3}e^t + e^{-\frac{t}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right),\ y_2(t) = Ae^t + Be^{3t} + \frac{1}{4}te^{3t} - \frac{1}{48}e^{-3t}$$

<u>Solutions de l'exercice 1</u> :