Exercice 1

Résoudre le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ en fonction du paramètre réel m :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & mz & = & 2 \\ 2x & + & my & + & 2z & = & 3 \end{array}\right. .$$

On précisera, dans chaque cas, la nature géométrique de l'ensemble des solutions.

Exercice 2 On désire déterminer tous les triplets de réels $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation

$$\frac{x+y-z}{x+y+z} = \frac{x-2y-z}{x+y+2z}.$$

Pour cela, on introduit un paramètre $m \in \mathbb{R}$, et on cherche les solutions (x, y, z), en fonction de m, de

$$\frac{x+y-z}{x+y+z} = \frac{x-2y-z}{x+y+2z} = m \qquad (*).$$

1. Montrer que le problème est équivalent à résoudre
$$\left\{\begin{array}{l} (\mathcal{S}_m) \\ m \in \mathbb{R} \\ x+y+z \neq 0 \\ x+y+2z \neq 0 \end{array}\right.$$
où $(\mathcal{S}_m)$ est un système linéaire, d'inconnue (x, y, z), de paramètre m.
2. Résoudre ce système $(\mathcal{S}_m)$, en fonction des valeurs de m.
3. En déduire toutes les solutions du problème initial.
4. Existe-t-il des solutions de la forme $(0, *, *)$? De la forme $(*, 0, *)$? De la forme $(*, *, 0)$? Si oui, les préciser dans chaque cas.

PROBLEME

PARTIE I - Recherche d'une famille de suites (linéaire, récurrente double)

On veut déterminer toutes les suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation linéaire récurrente d'ordre deux :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_n + u_{n+1}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

   Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n.$$
2. Prouver : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
3. Déterminer les matrices colonnes de la forme $C = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ et $C' = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha' \end{pmatrix}$ telles que $AC = -C$ et $AC' = 2C'$.

   On construit alors la matrice (concaténation des deux colonnes) $P = \begin{pmatrix} C & | & C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \alpha' \end{pmatrix}$.

4. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
5. En remarquant $AP = \left(\begin{array}{c|c} -C & 2C' \end{array} \right)$, déterminer, sans calcul, la matrice $D = P^{-1}AP$.
6. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.
7. En déduire une expression de A^n, puis une expression de u_n en fonction de n, u_0 et u_1.
8. Montrer qu'une suite réelle $u = (u_n)_{n \geqslant 0}$ vérifie la relation
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_n + u_{n+1},$$
<u>si et seulement si</u> : il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$.

PARTIE II - Recherche d'une famille de suites (linéaire, récurrente triple)

On veut déterminer toutes les suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation linéaire récurrente d'ordre trois :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

   Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n.$$
2. Montrer que connaître l'expression de A^n permettrait de trouver u_n en fonction de n et des premiers termes u_0, u_1 et u_2.
3. On note $\mathrm{I} = \mathrm{I}_3$ la matrice identité/unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Déterminer les rangs des matrices $A - 5I$, $A - 3I$ et $(A - 3I)^2$.
   (b) Calculer $(A - 5I)(A - 3I)^2$. En déduire que A est inversible et une expression de A^{-1}.
4. (a) Déterminer toutes les matrices colonnes $C_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ vérifiant $AC_1 = 5C_1$.

   Désormais C_1 représente l'unique matrice avec $x_1 = 1$.

   (b) Déterminer toutes les matrices colonnes $C_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ vérifiant $AC_2 = 3C_2$.

   Désormais C_2 représente l'unique matrice avec $x_2 = 1$.

   (c) Déterminer toutes les matrices colonnes $C_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ vérifiant $AC_3 = C_2 + 3C_3$.

   Désormais C_3 représente l'unique matrice avec $x_3 = 1$.

   (d) On définit la matrice (concaténation des trois colonnes) $P = \left(\begin{array}{c|c|c} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \right)$ et la matrice $T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Comparer AP et PT.

5. Montrer que P est une matrice inversible, et calculer P^{-1}.
6. (a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a : $A^n = PT^nP^{-1}$.

   (b) Montrer que la formule précédente est encore valable pour $n = -1$.
7. Montrer qu'il est possible d'écrire T sous la forme $D + N$, où D est une matrice diagonale et N une matrice nilpotente (i.e telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ avec $N^k = 0$).
   En déduire une expression simple de T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8. Déterminer la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $u_2 = -1$.
9. **Une autre application**
   Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $C(B)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec B (appelé *le commutant de la matrice* B). Autrement dit :
   $$C(B) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid BM = MB\}.$$
   (a) Donner quelques éléments évidents de $C(B)$.

   (b) Montrer que, si M et M' sont dans $C(B)$, et λ, μ des réels, alors $\lambda M + \mu M'$ est encore un élément de $C(B)$. On dit que l'ensemble $C(B)$ est *stable par combinaison linéaire.*

   (c) Montrer que, si M et M' sont dans $C(B)$, alors le produit MM' est encore un élément de $C(B)$. On dit que l'ensemble $C(B)$ est *stable par le produit matriciel.*

   (d) Montrer que, si M est dans $C(B)$, et M inversible, alors son inverse M^{-1} est encore un élément de $C(B)$. On dit que l'ensemble $C(B)$ est *stable par passage à l'inverse.*

   (e) Que pensez-vous de la phrase :
   «pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $C(B)$ est stable par transposition» ?
   On pourra comparer ${}^tB \times B$ et $B \times {}^tB$ pour $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
   Donner des exemples simples de matrices B pour lesquelles $C(B)$ est stable par transposition.

   (f) Prouver que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a l'équivalence suivante :
   $$M \in C(A) \Leftrightarrow P^{-1}MP \in C(T).$$
   (g) Montrer que les éléments de $C(T)$ sont exactement les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$
   où a, e et f sont des réels.

   (h) En déduire l'ensemble $C(A)$ comme l'ensemble des combinaisons linéaires de trois matrices (fixes) M_1, M_2 et M_3 que l'on précisera. On note $C(A) = \text{vect}(M_1, M_2, M_3)$.