Exercice 1

Pour tout entier $n \geqslant 3$, on considère la fonction $f_n : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = x^n - x - 1 \end{array} \right.$.

1. Pour tout $n \geqslant 3$: étudier cette fonction f_n et prouver qu'elle s'annule une, et une seule fois sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On note u_n l'unique réel positif en lequel la fonction f_n s'annule.
2. Quel est le signe de $f_n(1)$? Que peut-on en conclure concernant la suite $u = (u_n)_{n\geqslant 3}$?
3. Pour $n \geqslant 3$, quel est le signe de $f_n(u_{n+1})$? Que peut-on en conclure concernant la suite u ?
4. En déduire que la suite u converge. On note ℓ sa limite : que peut-on dire de ℓ ?
5. Rappeler la formule du binôme de Newton, puis prouver :
$$\forall n \geqslant 3,\ f_n(1 + \tfrac{1}{n}) > 0.$$
En déduire la valeur de ℓ
6. On pose $\alpha_n = u_n - \ell$: en remarquant que $n \ln(u_n) = \ln(1 + u_n)$, montrer qu'il existe une constante a non nul tel qu'un équivalent de α_n soit de la forme $\dfrac{a}{n}$ lorsque $n \to +\infty$.
Ainsi, on a établi le développement asymptotique de $u_n = \ell + \dfrac{a}{n} + \circ\left(\dfrac{1}{n}\right)$ lorsque $n \to +\infty$.
7. Pour $b \in \mathbb{R}_+^*$ un réel strictement positif, on définit h par $h\,(x) = \left(1 + \dfrac{b}{x}\right)^x - 2 - \dfrac{b}{x}$.
   (a) Justifier que h est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$. Déterminer la limite de h en $+\infty$.
   (b) Vérifier que pour $x > 0$ (où g est une fonction à expliciter) :
   $$h'\,(x) = g\,(x)\left(1 + \frac{b}{x}\right)^x + \frac{b}{x^2}.$$
   Déterminer les variations de g sur $]0, +\infty[$.
   En déduire la monotonie de h sur $]0, +\infty[$.
   (c) Comment doit-on choisir b pour que h soit toujours négative sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   (d) Justifier que pour tout $n \geqslant 3$, $\ell + \dfrac{a}{n}$ est une valeur approchée de u_n par défaut.

Exercice 2 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$, une suite réelle à termes positifs ou nuls qui vérifie la relation suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1}).$$
Montrer que u est une suite convergente.
Indications : on introduit la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \max(u_n, u_{n+1})$. Vérifier que la suite v est monotone et convergente. Conclure.