Exercice 1

On cherche les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, **continues en 0** et telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ [1 - f(x)f(y)]\, f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (\heartsuit).$$

Dans les questions **1** à **6**, on suppose que la fonction considérée f vérifie les conditions précédentes.

1. (a) Montrer $f(0) = 0$.

   (b) Montrer que f est impaire.

2. (a) Soit a, un réel quelconque : chercher la valeur de la limite $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h)$.

   (b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. (a) Justifier que, pour tout réel x : $[1 - f^2(x)]\, f(2x) = 2f(x)$.

   (b) En déduire que, **si** f admet une limite, finie **ou** infinie, en $+\infty$, **alors** cette limite est nécessairement 0.

4. On note $Z = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$, l'ensemble des « zéros » de la fonction f.

   (a) Prouver que Z est une partie non vide de $\mathbb{R}$, puis que : $\forall (a,b) \in Z^2$, $a + b \in Z$ et $-a \in Z$.

   (b) Montrer que si $x \in Z$, alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $mx \in Z$.

   (c) Montrer que si $x \in Z$, alors $\dfrac{x}{2} \in Z$.

5. **Dans cette question, on suppose que $Z = \{0\}$.**

   (a) Montrer que f a un signe constant strict sur l'intervalle $]0, +\infty[$

   (b) Soit $(x,y) \in]0, +\infty[^2$. Montrer que $f(x) - f(y)$ est du signe de $f(x-y)$.
   On rappelle que f est impaire.

   (c) En déduire que f est strictement monotone sur $]0, +\infty[$.

   (d) En utilisant la question **3b**, montrer que l'on aboutit à une contradiction.

6. (a) Montrer qu'il existe un réel a strictement positif dans Z.

   (b) On fixe donc un réel $a \in Z \cap]0, +\infty[$ (c'est possible d'après la question précédente).
   A l'aide d'un raisonnement par récurrence sur n, montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \left(\frac{a}{2^n}\right) \in Z.$$
   Puis montrer que :
   $$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \left(\frac{ma}{2^n}\right) \in Z.$$

   (c) Soit $x > 0$, un réel fixé. On définit la suite $u = (u_n)_{n \geqslant 0}$ par :
   $$u_n = \frac{a \left\lfloor \frac{2^n x}{a} \right\rfloor}{2^n},$$
   Déterminer la limite de la suite $u = (u_n)_{n \geqslant 0}$.
   En déduire que x appartient à l'ensemble Z.

7. Conclure.

8. <u>Question complémentaire</u> : montrer que, avec l'hypothèse f dérivable et vérifiant $(\heartsuit)$, le même résultat tombait plus rapidement.

Exercice 2

On considère l'équation

$$(E) : 1 - 5x = 2x^2 \ln x.$$

1. Soit φ définie sur $]0, +\infty[$ par $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{5}{x} - 2\ln x$.
   En étudiant φ, montrer que (E) admet une unique solution α et justifier $\alpha \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$.
2. Soit f définie pour $x > 0$ par
   $$f(x) = \frac{1 - x - 2x^2 \ln x}{4}.$$
   (a) Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction continue et dérivable sur $[0, +\infty[$. Préciser alors $f(0)$, $f'(0)$ et la tangente en $x = 0$.
   (b) f est-elle deux fois dérivable en 0 ?
   (c) Etudier les variations de f' et de f sur $[0, 1]$ et prouver :
   $$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) \in [0, 1] \quad \text{et} \quad |f'(x)| \leqslant \frac{3}{4}.$$
3. Recherche d'une valeur approchée de α : on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
   $$u_0 = \frac{1}{5} \text{ et pour } n \geqslant 0,\ u_{n+1} = f(u_n).$$
   (a) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
   (b) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{3}{4} |u_n - \alpha|$
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   (d) Comment utiliser cette suite u pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-5} près ?