Exercice 1 Le marsupilami parle une langue étrange mais assez pauvre puisque les seuls mots de son vocabulaire sont :

«houba», «hop», «ba», «habou», «bahou», «hou», «baba» et «grrrhouba».

De plus, chaque phrase commence toujours par le mot «houba» et ne comporte pas plus de 6 mots.

1. Combien de phrases le marsupilami peut-il formuler dans sa langue ?
2. Combien de phrases formées de 5 mots différents le marsupilami peut-il formuler dans sa langue ?
3. Combien de phrases le marsupilami peut-il formuler dans sa langue en utilisant une fois chacun des mots suivants : «houba», «hop», «baba», «houba», «houba», «hop» ?

Exercice 2 Une séquence de Skolem d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ est un $2n-$uplet $S = (s_1, s_2, \ldots, s_{2n})$ tel que, pour tout $k \in [[1, n]]$:

– l'entier k apparaît exactement deux fois dans les composantes de S

– les deux apparitions de l'entier k sont distantes de k composantes dans S.

Un exemple : $(4, 5, 1, 1, 4, 3, 5, 2, 3, 2)$ est une séquence de Skolem d'ordre 5 car les deux 1 sont distants de une composante, les deux 2 de deux composantes, les deux 3 de trois composantes, les deux 4 de quatre composantes et les deux 5 de cinq composantes.

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés des séquences de Skolem, et d'obtenir une condition nécessaire sur l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour l'existence de séquences de Skolem d'ordre n.

Pour chaque séquence de Skolem $S = (s_1, s_2, \ldots, s_{2n})$ et chaque entier $k \in [[1, n]]$, on notera

$$(p_k, q_k) \in [[1, 2n]]^2 \text{ l'unique couple tel que } s_{p_k} = s_{q_k} = k \text{ et } q_k - p_k = k.$$

1. (a) Déterminer toutes les séquences de Skolem d'ordre 1.

   (b) Existe-t-il des séquences de Skolem d'ordre 2 ? Justifier.

   (c) Existe-t-il des séquences de Skolem d'ordre 3 ? Justifier.

   (d) Donner un exemple de séquence de Skolem d'ordre 4.

2. Déterminer tous les couples (p_k, q_k), avec $k \in [[1, 5]]$ pour la séquence de Skolem $(4, 5, 1, 1, 4, 3, 5, 2, 3, 2)$ de l'exemple.

3. Désormais, on fixe une séquence de Skolem $S = (s_1, s_2, \ldots, s_{2n})$ d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

   On considère les applications suivantes :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} [[1, 2n]] & \longrightarrow & [[1, n]] \\ \ell & \longmapsto & \varphi(\ell) = s_\ell \end{array} \right. \qquad P : \left| \begin{array}{ccc} [[1, n]] & \longrightarrow & [[1, 2n]] \\ k & \longmapsto & P(k) = p_k \end{array} \right. \qquad Q : \left| \begin{array}{ccc} [[1, n]] & \longrightarrow & [[1, 2n]] \\ k & \longmapsto & Q(k) = q_k \end{array} \right. .$$

   (a) Démontrer que l'application φ est surjective.

(b) L'application φ est-elle injective ?
Si non, déterminer les antécédents de chaque entier $k \in [[1, n]]$.

(c) Démontrer que l'application P est injective.

(d) L'application P est-elle surjective ? Si non, déterminer le sous-ensemble des éléments de $[[1, 2n]]$ qui n'admettent pas d'antécédent.

(e) Etudier brièvement l'injectivité et la surjectivité de l'application Q.

(f) Calculer $\varphi \circ P$.

(g) En raisonnant par l'absurde, prouver : $P \circ \varphi \neq \mathrm{Id}_{[[1,2n]]}$.

(h) Retrouver le résultat de la question précédente en donnant un contre-exemple à l'aide de la séquence de Skolem $(4, 5, 1, 1, 4, 3, 5, 2, 3, 2)$ du début de l'énoncé.

4. (a) Justifier : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k + \sum_{k=1}^{n} q_k = n(2n+1)$.

(b) En déduire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = n^2 - \frac{n(n-1)}{4}$.

(c) Conclure que «n ou $n-1$ est un multiple de 4» est une condition nécessaire à l'existence d'au moins une séquence de Skolem d'ordre n.

(d) Discuter de la suffisance de la condition de la question précédente à l'aide d'exemples de séquences de Skolem obtenues à la question **(1)** et de l'exemple $(4, 5, 1, 1, 4, 3, 5, 2, 3, 2)$.