La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Etant donné un nombre entier naturel non nul n et un ensemble E à n éléments, on appelle *involution* de E toute bijection f de E sur lui-même telle que $f \circ f = \mathrm{Id}$, où Id désigne l'application identique de E. L'objectif du problème est l'étude du nombre T_n d'involutions de E et, en particulier, la recherche d'un équivalent du nombre T_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie I : Etude du nombre T_n d'involutions de E

1. Calculer T_1, T_2 et T_3.
2. On suppose désormais $n \geqslant 3$.
   (a) Déterminer en fonction de T_i, où $1 \leqslant i < n$:
   - le nombre des involutions σ de $[[1, n]]$ telles que $\sigma(n) = n$;
   - le nombre des involutions σ de $[[1, n]]$ telles que $\sigma(n) = k$, où k est un nombre entier donné de $[[1, n-1]]$

   (b) En déduire la relation suivante :
$$T_n = T_{n-1} + (n-1)T_{n-2} \tag{1}$$
3. Rédiger en Python un algorithme permettant le calcul des p premiers termes de la suites (T_n) pour un nombre entier donné $p \geqslant 3$.
   En programmant cet algorithme, expliciter les valeurs de T_n pour $n \leqslant 10$.

Partie II : Interprétation de T_n à l'aide d'une suite de polynômes

On considère la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$$u(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

Pour tout nombre entier naturel non nul n, on désigne par $u^{(n)}$ la dérivée $n^{ème}$ de u. On note H_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$$u^{(n)}(x) = H_n(x)u(x) \tag{2}$$

1. (a) Exprimer $u'(x)$ en fonction de $u(x)$ et x.
   En déduire la relation suivante, pour tout nombre entier $n \geqslant 2$:
   $$u^{(n)}(x) = xu^{(n-1)}(x) + (n-1)u^{(n-2)}(x) \tag{3}$$
   (b) Calculer H_0 et H_1, puis déduire des relations précédentes l'expression de $H_n(x)$ en fonction de $H_{n-1}(x)$, $H_{n-2}(x)$ et x.
   (c) Prouver que H_n est un polynôme dont on précisera, en fonction de n, le degré, la parité et le signe sur $[0, +\infty[$.
   (d) Comparer T_n et $H_n(1)$.
2. (a) En dérivant la relation (2) et en utilisant la relation entre $H_{n+1}(x), H_n(x), H_{n-1}(x)$ et x, établir la relation suivante, pour tout nombre entier naturel non nul n :
   $$H_n'(x) = nH_{n-1}(x) \tag{4}$$
   (b) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer $H_n(0)$ et $H_n'(0)$ en fonction de n. (On distinguera deux cas suivant la parité de n.)
3. (a) Etablir que, pour tout nombre entier naturel n :
   $$H_n''(x) + xH_n'(x) - nH_n(x) = 0$$
   (b) Dans toute la suite du problème, pour tout nombre entier naturel n, on note v_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
   $$v_n(x) = H_n(x) \exp\left(\frac{x^2}{4}\right)$$
   Etudier le signe de v_n et de v_n' sur $[0, +\infty[$. Calculer $v_n(0)$ et $v_n'(0)$.
   (c) Exprimer $v_n''(x)$ en fonction de $v_n(x)$ et de x.
   (d) En déduire la relation suivante, pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre réel x appartenant à $[0, 1]$:
   $$\left(n + \frac{1}{2}\right) v_n(x) \leqslant v_n''(x) \leqslant \left(n + \frac{3}{4}\right) v_n(x) \tag{5}$$

Dans toute la suite du problème, on posera :

$$\alpha_n = \sqrt{n + \frac{1}{2}} \qquad \beta_n = \sqrt{n + \frac{3}{4}}$$

Partie III : Recherche d'un équivalent de T_n

On étudie tout d'abord un équivalent de T_n lorsque l'entier $n = 2p$ est pair.

1. On établit dans cette question un résultat préliminaire permettant d'encadrer une fonction numérique définie sur $[0, 1]$ à valeurs strictement positives, de classe C^2 et satisfaisant aux relations :

$$\alpha^2 f(x) \leqslant f''(x) \leqslant \beta^2 f(x) \qquad f(0) = a \qquad f'(0) = 0 \tag{6}$$

où a, α et β sont des nombres réels strictement positifs donnés.

   (a) Déterminer des nombres réels λ et μ tels que la fonction numérique φ définie sur $[0, 1]$ par la relation :

$$\varphi(x) = \lambda \exp(\beta x) + \mu \exp(-\beta x)$$

   vérifie $\varphi(0) = a$ et $\varphi'(0) = 0$.
   Indiquer alors le signe de φ sur $[0, 1]$ et exprimer $\varphi''(x)$ en fonction de $\varphi(x)$.

   (b) Soit w la fonction numérique définie sur $[0, 1]$ par la relation :

$$w = f\varphi' - \varphi f'$$

   Calculer $w(0)$. Etudier le signe de w', puis celui de w.

   (c) En déduire, pour tout nombre réel x appartenant à $[0, 1]$, l'inégalité

$$f(x) \leqslant \varphi(x)$$

   (d) Etablir, pour tout nombre réel x appartenant à $[0, 1]$, l'inégalité suivante :

$$f(x) \leqslant \frac{a}{2}(\exp(\beta x) + 1) \tag{7}$$

   (e) Etablir de même que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0, 1]$:

$$\frac{a}{2}\exp(\alpha x) \leqslant f(x) \tag{8}$$

2. (a) A l'aide de la relation (5), établir que, pour tout nombre entier naturel p :

$$H_{2p}(0)\frac{\exp(\alpha_{2p})}{2} \leqslant \exp\left(\frac{1}{4}\right) H_{2p}(1) \leqslant H_{2p}(0)\frac{\exp(\beta_{2p}) + 1}{2}$$

   (b) On admet la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.
   D'après la **partie II** : $H_{2p}(0) = \dfrac{(2p)!}{2^p p!}$.
   En déduire que, pour $n = 2p$, on a :

$$T_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{1}{4}\right) \exp(\sqrt{n}) \left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{n}{2}} \tag{9}$$

(c) Donner une valeur approchée du quotient des deux nombres de cette expression pour $n = 10$.

On étudie enfin un équivalent de T_n lorsque l'entier n est impair ($n = 2p+1$).

3. On établit par des méthodes analogues à celles de la question III.1. que, si g est une fonction numérique sur $[0,1]$ à valeurs strictement positives sur $]0,1]$ de classe C^2 et satisfaisant aux relations :

$$\alpha^2 g(x) \leqslant g''(x) \leqslant \beta^2 g(x) \quad g(0) = 0 \quad g'(0) = a \tag{10}$$

où a, α et β sont des nombres réels strictements positifs donnés, alors, pour tout nombre réel x appartenant à $[0,1]$:

$$\frac{a}{2\alpha}(\exp(\alpha x) - 1) \leqslant g(x) \leqslant \frac{a}{2\beta}\exp(\beta x)$$

(on ne demande pas de justifier cet encadrement)

(a) En déduire que, pour $n = 2p+1$:

$$H_n(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{n}\exp\left(-\frac{1}{4}\right)\exp(\sqrt{n})H_{n-1}(0)$$

(b) En conclure que la relation (9) est encore valable lorsque le nombre entier n est impair.