Exercice 1 Lorsque cela a un sens, on pose :

$$\psi(t) = \frac{1}{t+\sin(t)} \quad \text{et} \quad f(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t+\sin(t)}.$$

1. Déterminer, en fonction de t, le signe exact de $\delta(t) = t + \sin(t)$.

   En particulier, résoudre, avec $t \in \mathbb{R}$, l'équation $t + \sin(t) = 0$.

2. (a) Déterminer, en justifiant rigoureusement, l'ensemble D_f de définition de la fonction f.

   (b) Montrer que f est de classe C^1 sur D_f, et calculer $f'(x)$ pour $x \in D_f$.

   (c) Déterminer le signe de $f'(x)$ pour $x \in D_f$.

   (d) Etudier la parité de la fonction f.

3. On se propose de déterminer la limite de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

   (a) Montrer, pour tout $x > 0$:
   $$\left| f(x) - \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} \right| \leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+\sin(t))}.$$

   (b) Justifier qu'il existe un réel $m > 0$ tel que :
   $$\text{pour tout } t \geqslant m, \quad t + \sin(t) \geqslant \frac{t}{2}.$$

   (c) En déduire que f possède une limite finie ℓ, lorsque $x \to +\infty$, que l'on déterminera.

4. On se propose de déterminer la limite de $f(x)$ lorsque $x \to 0$.

   (a) Déterminer un développement asymptotique de $\psi(t)$, lorsque $t \to 0$, sous la forme
   $$\psi(t) = \frac{a}{t} + bt + \underset{t\to 0}{o}(t) \quad \text{i.e} \quad \psi(t) = \frac{a}{t} + bt + t\varepsilon(t) \quad \text{avec } \lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0.$$

   (b) Soit θ définie par $\theta(t) = \dfrac{1}{t+\sin(t)} - \dfrac{a}{t}$.
   Préciser le domaine de définition de la fonction θ.

   (c) Montrer que θ se prolonge par continuité en 0. Préciser alors la valeur de $\theta(0)$.

   On note encore θ la fonction ainsi prolongée en 0.

   (d) Justifier que $M = \sup\limits_{[-1,1]} |\theta|$ existe.

   (e) En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \left(\displaystyle\int_x^{2x} \theta(t)\,\mathrm{d}t \right)$ puis de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

5. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, ainsi prolongée, est-elle dérivable en 0 ?

6. A l'aide des renseignements précédents, tracer l'allure possible de la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

Exercice 2

Soit un entier naturel $n \in \mathbb{N}$, fixé, et $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions numériques définies et infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

A toute fonction $f \in E$, on associe la fonction $T(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

1. (a) Montrer que T est un endomorphisme de E.

   (b) Prouver correctement l'égalité : $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}_n[X]$.

   (c) Montrer que T est un projecteur de E.

   (d) Donner une description du noyau de T.

2. A toute fonction $f \in E$, on associe la fonction $R(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \, R(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

   (a) Montrer que l'application $R : [f \mapsto R(f)]$ est un projecteur de l'espace E.

   (b) Préciser son noyau et son image.

3. Une application

   (a) Déterminer les fonctions f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et solutions du problème suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = 0.$$

   (b) Déterminer les fonctions f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et solutions du problème suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = f(x).$$

   (c) Déterminer les fonctions f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et solutions du problème suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = 2f(x).$$