PROBLEME 1

PREMIÈRE PARTIE : étude des endomorphismes u tels que $u \circ u = 0$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, u un endomorphisme **non nul** de E tel que $u \circ u = 0$: on note r le rang de u et p la dimension du noyau de u.

1. (a) Il existe une inclusion reliant les ensembles $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$: quelle est-elle ? La prouver.
   (b) En déduire : $r \leqslant \dfrac{n}{2}$ et $p \geqslant \dfrac{n}{2}$.
2. Pour cette question on suppose $n = 2$.
   (a) Justifier que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$.
   (b) Soit $\vec{i}$, un vecteur **non nul** appartenant à $\mathrm{Im}(u)$ et $\vec{j}$ un vecteur tel que $u(\vec{j}) = \vec{i}$.
   Montrer que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de E, et donner la matrice de u dans cette base.
3. Pour cette question, on suppose $n = 3$.
   (a) Montrer que $r = 1$. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(u)$?
   (b) Soit $\vec{k}$ un vecteur de E n'appartenant pas à $\mathrm{Ker}(u)$ et $\vec{i} = u(\vec{k})$.
   Justifier l'existence d'un vecteur $\vec{j}$ de $\mathrm{Ker}(u)$, non colinéaire à $\vec{i}$, puis démontrer que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de E.
   (c) Déterminer la matrice de u dans cette base.

SECONDE PARTIE : application à un exemple

On rappelle que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, et $GL_3(\mathbb{R})$ l'ensemble constitué par les matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Dans cette partie, I désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et J la matrice définie par :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est J.
   (a) Vérifier que $v \circ v = 0$.
   (b) Donner la valeur de J^n pour tout entier $n \geqslant 0$.
   (c) Déterminer le noyau et l'image de v. Préciser leur dimension, une base et une équation (ou système d'équations) pour chacun d'entre eux. Ces deux sous-espaces vectoriels sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?
2. (a) Justifier que la famille $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, avec $\vec{i} = (1, 2, -1)$, $\vec{j} = (1, 0, 1)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de v est la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) Dans la suite du problème, on notera P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$.
   Pourquoi la matrice P est-elle inversible ? Préciser P^{-1} (le détail des calculs est attendu sur la copie).
   (c) Quelle relation existe-t'il entre les matrices J, N et P ?

3. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices $M_{a,b}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $M_{a,b} = aI + bJ$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Démontrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   On en précisera une base $\mathcal{D}$ et la dimension.
   (b) Si $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, prouver que le produit $M_{a,b} \times M_{c,d}$ est aussi un élément de $\mathcal{E}$.
   (c) A quelle condition sur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ une matrice $M_{a,b}$ est-elle inversible ?
   Lorsque c'est le cas, montrer que son inverse peut s'écrire sous la forme $M_{c,d}$.
   (d) Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, déterminer, pour tout entier $n \geqslant 1$, les coordonnées de $M_{a,b}^n$ sur la base $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$.
4. On considère l'ensemble Δ des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $M = I + kJ$ (avec $k \in \mathbb{R}$).
   (a) Démontrer que Δ est stable pour la multiplication matricielle.
   (b) Vérifier que Δ est inclus dans $GL_3(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (c) Montrer[1] alors que Δ est un groupe pour la multiplication matricielle. Est-ce un groupe commutatif (i.e abélien) ?
   (d) L'ensemble Δ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
5. Soit $M = I + kJ$ où k est un réel **non nul** fixé.
   On se propose dans cette question de trouver toutes les matrices X de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ solutions de l'équation
$$(*) : X^2 = M.$$
   (a) Quelles sont les solutions de $(*)$ appartenant à Δ ?
   (b) Justifier l'égalité $P^{-1}MP = T$, T désignant la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (c) Montrer qu'en posant $Y = P^{-1}XP$, l'équation $(*)$ équivaut à l'équation
$$(**) : Y^2 = T.$$
   (d) Soit Y, une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ solution de $(**)$. Montrer que $YT = TY$.
   Si on pose $Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, en déduire que Y est triangulaire supérieure et que $i = a$.
   (e) Résoudre l'équation $(**)$. On vérifiera qu'il y a une infinité de solutions dont on précisera la forme.
   (f) Exprimer alors les solutions de $(*)$ à l'aide de la matrice P *(aucun calcul n'est demandé)*.

PROBLEME 2

<u>But</u> : dans ce problème, on désire démontrer que, pour tout endomorphisme f d'un espace vectoriel E de **dimension finie** $n \geqslant 1$, il existe un entier $1 \leqslant k \leqslant n$ tel que $\mathrm{Ker}(f^k) \oplus \mathrm{Im}(f^k) = E$.

I : un premier exemple simple

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par
$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) = (4x - y + 5z, -2x - y - z, -4x + y - 5z) \end{array} \right. .$$

1. Dans cette question, il s'agit de vérifier que Δ est stable par produit, que toute matrice est inversible avec son inverse dans Δ, et de savoir si les matrices de Δ commutent entre elles.

1. Déterminer le noyau de f (équations, base, dimension).
2. En déduire l'image de f (équations, base, dimension) : a-t-on $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$?
3. Déterminer l'expression analytique de f^2, puis son noyau et son image (équations, bases, dimensions) : a-t-on $\mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Im}(f^2) = E$?

II : des résultats généraux intéressants

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension quelconque (finie ou infinie). Soit f un endomorphisme de E.
Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on définit le noyau $N_k = \mathrm{Ker}(f^k)$ et l'image $I_k = \mathrm{Im}(f^k)$.

1. Vérifier que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a : $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$.
2. On **suppose** qu'il existe un entier k tel que $N_k = N_{k+1}$: montrer qu'alors $N_{k+1} = N_{k+2}$.

III : résolution du problème posé

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, et f un endomorphisme de E. On reprend les notations de la partie précédente.

1. Montrer qu'il existe nécessairement un entier $k \geqslant 1$ tel que $N_k = N_{k+1}$.
   On note p le plus petit entier $k \geqslant 1$ vérifiant cette propriété.
2. Justifier que p existe et que $p \leqslant n$: on le nomme **indice de l'endomorphisme** f.
3. Démontrer que, pour tout $k \geqslant p$, on a $N_p = N_k$.
4. En déduire que $E = \mathrm{Ker}(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p)$.

IV : quelques exemples généraux

Dans cette partie, E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, et f un endomorphisme de E.

1. Si $f = 0$, que vaut l'indice de f ?
2. Si f est un automorphisme de E, que vaut l'indice de f ?
3. Si f est un projecteur de E différent de l'identité, justifier que f n'est pas bijectif et trouver son indice.
4. Soit f un endomorphisme nilpotent de E : on rappelle que cela signifie qu'il existe un entier $r \geqslant 1$ tel que $f^r = 0$. On appelle alors *indice de nilpotence* de f le plus petit entier $k \geqslant 1$ vérifiant $f^k = 0$.
   (a) Justifier l'existence de l'entier i, **indice de nilpotence** de f.
   Cet entier vérifie donc : $f^{i-1} \neq 0$ et $f^i = 0$.
   (b) Montrer que i est également l'*indice* de f. On vient donc de prouver que, pour un endomorphisme nilpotent, son *indice* est son *indice de nilpotence*.
5. A l'aide du résultat de la question précédente, montrer que si f est un endomorphisme quelconque de E tel que $f^n \neq 0$, alors f n'est pas un endomorphisme nilpotent.

V : un exemple polynômial

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{K}_n[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et de degré inférieur ou égal à n. On définit, pour tout $P \in E$, $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. (a) Montrer que Δ est un endomorphisme de l'espace E.

   (b) Déterminer le noyau de Δ.
   (c) Justifier l'inclusion $\mathrm{Im}(\Delta) \subset \mathbb{K}_{n-1}[X]$. En déduire l'image de l'endomorphisme Δ.
   (d) Que peut-on déjà en déduire concernant l'indice de Δ ?

2. On définit la famille de polynômes $\mathcal{F} = (P_0, P_1, P_2, \dots, P_n)$ par
$$P_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, \dots, n\},\ P_k = \frac{1}{k!}X(X-1)(X-2)\dots(X-k+1) = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(X-i).$$
   (a) Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est une base de E.
   (b) Qui est $\Delta(P_0)$? Puis vérifier que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\Delta(P_k) = P_{k-1}$.
   (c) En déduire, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, une expression simple de $\Delta^i(P_j)$.
3. Déduire, des résultats précédents, que Δ est un endomorphisme nilpotent de E.
   Que vaut son indice ?
4. QUESTION FACULTATIVE : dans cette question, on cherche les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ qui ne prennent que des valeurs entières sur les entiers. Autrement dit, on cherche les polynômes $Q \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant : $\forall j \in \mathbb{Z}$, $Q(j) \in \mathbb{Z}$.
   (a) Donner un exemple de polynôme de $\mathbb{C}[X]$, à coefficients non tous entiers et qui vérifie cette propriété, et un polynôme à coefficients tous non entiers.
   (b) Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, P_k est solution du problème. En déduire d'autres solutions.
   (c) Soit Q, un polynôme solution : on suppose $Q \in \mathbb{C}_n[X]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On appelle $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ses coordonnées sur la base $\mathcal{F} = (P_0, P_1, P_2, \dots, P_n)$. Déterminer des relations entre ces coordonnées, puis en déduire qu'elles sont toutes entières.
   (d) Conclure.

VI : un exemple à paramètre

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ défini par (où m désigne un paramètre réel)
$$f_m : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & f_m(x,y,z,t) = (mx+y+mz, y+mz+t, x+y+mz, y) \end{array} \right. .$$

1. Montrer : (f_m est un automorphisme de $\mathbb{R}^4$) $\iff$ ($m \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$).
2. Que vaut l'indice de f_m si $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$?
3. Que vaut l'indice de f_1 ? Que vaut l'indice de f_0 ?

VII : cas de la dimension infinie

Si $E = \mathbb{K}[X]$ et d, l'endomorphisme de E défini par $d(P) = P'$, prouver qu'il n'existe pas d'entier $k \geqslant 1$ tel que $\mathrm{Ker}(d^k) \oplus \mathrm{Im}(d^k) = E$.