PROBLEME

Introduction

Si A et U sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N}^*$), on dit que la matrice U est un **pseudo-inverse** de la matrice A si les trois relations suivantes sont vérifiées :

(1) $AUA = A$

(2) $UAU = U$

(3) $UA = AU$.

Le but de ce problème est de caractériser l'existence d'un pseudo-inverse pour une matrice carrée donnée, et d'obtenir une méthode de calcul lorsqu'il existe.

I. Premières propriétés du pseudo-inverse

Dans cette partie, A désigne un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \geqslant 1$.

1. On suppose que A admet deux pseudo-inverses X et X'.
   (a) En calculant le produit $AXAX'$ de deux manières différentes, montrer : $XA = AX'$.
   (b) En déduire que $X = X'$. Ceci prouve que, s'il existe, le pseudo-inverse est unique. On pourra donc parler, dans ce cas, «**du**» pseudo-inverse de A.
2. (a) On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$: montrer que P est inversible.
   En déduire qu'elle admet un pseudo-inverse, que l'on calculera explicitement.
   (b) De manière générale, une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède-t-elle un pseudo-inverse ?
3. Dans cette question, On suppose que A admet un pseudo-inverse X.
   Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: montrer que la matrice $P^{-1}AP$ possède également un pseudo-inverse que l'on déterminera.

II. Un premier exemple numérique

Dans cette partie, $n = 3$, on définit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, et f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A, c'est-à-dire dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B}_0 = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est A.
On vérifie aisément l'égalité (inutile de le faire) : $A^3 - 6A^2 + 4A = 0$.

1. (a) Déterminer[1] les racines du polynôme $Q = X^3 - 6X^2 + 4X$.
   (b) Si k est un entier naturel, déterminer, en fonction de k et des racines de Q, le reste R_k de la division euclidienne du polynôme X^k par le polynôme Q.
   (c) Donner une formule permettant de calculer les puissances successives de A (i.e) les A^k.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$, le noyau de f.
   La matrice A est-elle inversible ? Préciser $\mathrm{rg}(A)$, le rang de la matrice A.
3. On pose
$$\vec{e}_1 = \vec{\varepsilon}_2 + 2\vec{\varepsilon}_3, \quad \vec{e}_2 = \vec{\varepsilon}_1 + 2\vec{\varepsilon}_2 + 3\vec{\varepsilon}_3, \quad \vec{e}_3 = \vec{\varepsilon}_1 - \vec{\varepsilon}_2 + \vec{\varepsilon}_3$$
   et on désigne par $\mathcal{B}$ la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

1. On vérifiera qu'elles sont toutes réelles, on les notera r_0, r_1 et r_2 avec $r_0 < r_1 < r_2$.

(a) Ecrire la matrice P de la famille $\mathcal{B}$ relativement à la base canonique $\mathcal{B}_0$.

(b) En décrivant la méthode employée, calculer, s'il existe, l'inverse P^{-1} de la matrice P.

(c) Justifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(d) Montrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$, puis que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

(e) Déterminer A', la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$.
On trouvera une matrice de la forme $A' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et l'on posera $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

4. (a) Justifier l'inversibilité de la matrice A_1 : calculer son inverse noté $A_1^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$.

(b) Montrer que la matrice $U' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' & 0 \\ \gamma' & \delta' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est le pseudo-inverse de la matrice A'.

(c) Déterminer alors le pseudo-inverse U de la matrice A, d'abord en fonction de U' et P, puis en explicitant ses coefficients.

(d) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de π, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice UA relativement à la base $\mathcal{B}_0$.
<u>Indication</u> : commencer par examiner la matrice de π relativement à la base $\mathcal{B}$.

III. Un résultat général à retenir

On considère ici deux endomorphismes u et v d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$.

1. (a) Prouver l'inclusion $\boxed{\mathrm{Im}(u \circ v) \subset \mathrm{Im}(u)}$.
Que peut-on en déduire concernant $\mathrm{rg}(u \circ v)$ et $\mathrm{rg}(u)$?

(b) Prouver l'inclusion $\boxed{\ker(v) \subset \ker(u \circ v)}$.
Comparer alors $\mathrm{rg}(u \circ v)$ et $\mathrm{rg}(v)$.

2. Montrer que, si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors : $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \min\left(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\right)$.

IV. Un second exemple numérique

Dans cette partie, $n = 3$, on définit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et g est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice B.

1. (a) On note $C(B)$, l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice B. Montrer que $C(B)$ est un sous-espace de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que les éléments de $C(B)$ sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, λ, μ et ν étant trois réels arbitraires.

(c) Calculer B^2 puis donner la dimension et une base de $C(B)$.

2. On suppose que B admet un pseudo-inverse V.

(a) Montrer qu'il existe trois réels λ_1, μ_1 et ν_1 tels que $V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ 0 & \lambda_1 & \mu_1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$.

(b) On rappelle que $V = VBV$: montrer que $\mathrm{rg}(V) \leqslant 2$.
En déduire que λ_1 est nul.

(c) Montrer que la matrice BV est de rang 1 au plus.

(d) Mettre en évidence une contradiction. Que peut-on en conclure ?

(e) Montrer que $\vec{\varepsilon}_1 \in \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(g)$: $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

3. A la lumière des résultats précédents, **conjecturer** une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admette un pseudo-inverse.

V. Un résultat préliminaire

Dans cette partie, on considère un espace vectoriel E, de dimension quelconque (pas nécessairement finie), F et G deux sous-espaces supplémentaires de E, et v un automorphisme de F (attention, de F, pas de E !).
On désigne par p le projecteur sur F dans la direction G, et on pose $u = v \circ p$.

1. (a) Vérifier que l'application u est bien définie, puis que u est un endomorphisme de E.

   (b) Déterminer le noyau de u, puis montrer que u induit un automorphisme de F que l'on déterminera.
   Rappel : cela signifie qu'en définissant, pour tout $\vec{x} \in F$, $\hat{u}(\vec{x}) := u(\vec{x})$, l'application $\hat{u}$ est un automorphisme de F (i.e) $\hat{u} : F \to F$ et $\hat{u}$ bijective.

2. Montrer que, si u' est un endomorphisme de E de noyau G et coïncidant avec v sur F, alors $u' = u$. Qu'a-t-on démontré ?

3. On suppose, dans cette question, que F et G sont de dimensions finies et non nulles, que l'on note respectivement r et s.

   (a) Montrer l'existence d'une base $(\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_r}, \vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_s)$ de E telle que $(\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_r})$ soit une base de F et $(\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_s)$ soit une base de G.

   (b) On désigne par $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,r\}^2}$, la matrice de l'application v relativement à la base $(\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_r})$ de F. Que peut-on dire de la matrice A ?
   Ecrire, à l'aide des coefficients de A, la matrice de u relativement à la base $(\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_r}, \vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_s)$ de E.

VI. Condition d'existence du pseudo-inverse

Dans cette partie, A désigne un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (avec $n \geqslant 2$), et f désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.

1. Dans cette question seulement : on suppose que A admet un pseudo-inverse X, et l'on désigne par g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice X.

   (a) Montrer : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$.

   (b) Montrer que $(AX)^2 = AX$.
   Que peut-on en déduire quant la nature de l'endomorphisme $f \circ g$?

   (c) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^n$.

2. Dans cette question seulement : on suppose que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^n$.

   (a) Montrer que, dans chacun des deux cas où $\mathrm{Ker}(f)$ ou $\mathrm{Im}(f)$ est réduit au vecteur nul, alors la matrice A admet un pseudo-inverse que l'on déterminera.
   On suppose donc, dans la suite de cette question, que ni Ker(f) ni Im(f) n'est réduit au vecteur nul.

   (b) Montrer l'existence d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et d'un entier $r \in \{1, \dots, n-1\}$ tels que la matrice A' de f relativement à la base $\mathcal{B}$ soit de la forme
   $$A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,r} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,r} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$
   la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,r} \end{pmatrix}$ étant elle-même inversible.

   (c) Démontrer que la matrice A' admet un pseudo-inverse Y' que l'on explicitera à l'aide de A_1.

   (d) Montrer que la matrice A admet un pseudo-inverse Y que l'on explicitera.

3. Un résultat général : u étant un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, montrer que le noyau et l'image de u sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E si, et seulement si, $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$.

4. Montrer :
   « une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède un pseudo-inverse si, et seulement si, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$ ».
   Dans ce cas, indiquer une méthode de calcul de ce pseudo-inverse.

VII. Quelques applications numériques.

Pour chacune des matrices A suivantes, chercher si elle admet un pseudo-inverse et, le cas échéant, calculer celui-ci.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$? $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$? $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$? $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$? $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?