

PROBLEME

1. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice M . On note $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 , Id l'application identité de \mathbb{R}^3 et I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $Q_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_3)$.

Justifier l'équivalence :

$$(Q_M(\lambda) = 0) \Leftrightarrow (\text{il existe un vecteur } \vec{v} \text{ non nul tel que } f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}).$$

(b) Calculer $Q_M(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: vérifier que Q_M est une fonction polynomiale de degré trois possédant deux racines réelles λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 < \lambda_2$. On dit que λ_1 et λ_2 sont les *valeurs propres* de la matrice M .

(c) Pour $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$, on note $E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$: ce sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}^3$ est appelé *sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ* , et les vecteurs non nuls de E_λ sont les *vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ* .

Pour chaque $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$, à l'aide de la matrice $M - \lambda I_3$, déterminer la dimension et une base de E_λ : il est demandé de choisir une base de E_λ constituée de vecteurs dont la première composante est égale à 1.

(d) Montrer que E_{λ_1} et E_{λ_2} sont supplémentaires dans $E = \mathbb{R}^3$.

En déduire l'existence d'une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible telle que $M = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale de la forme $D = \text{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$ avec $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.

Calculer les matrices D , P et P^{-1} .

2. Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A , B et C .

A l'instant $t=0$, il se trouve au point A . Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau. L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement « l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet ».

On note B_n l'événement « l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet ».

On note C_n l'événement « l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet ».

On pose $\mathbb{P}(A_n) = a_n$, $\mathbb{P}(B_n) = b_n$ et $\mathbb{P}(C_n) = c_n$.

(a) Exprimer, **en le justifiant**, a_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .

Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .

(b) Montrer comment les résultats de la question 1. peuvent être utilisés pour calculer a_n , b_n et c_n en fonction de n . Limites de ces suites ? Interprétation ?