La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1

QUESTIONS DE COURS - Aucune preuve n'est demandée dans les questions **(1.)**, **(2.)** et **(3.)**.

1. Si Q est un nombre complexe et N un entier naturel, simplifier la somme :
$$1+Q+Q^2+\cdots+Q^N=\sum_{k=0}^{N}Q^k=\ldots?$$
2. Compléter (i.e factoriser), si θ est un réel :
$$1+e^{i\theta}=\ldots \qquad \text{et} \qquad 1-e^{i\theta}=\ldots$$
3. Si r_1 et r_2 sont les deux racines du polynôme du second degré $P(X)=aX^2+bX+c$, que valent leur somme r_1+r_2 et leur produit r_1r_2 en fonction des coefficients de P ?
4. (a) Soit $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & f(x)=x^3\end{array}\right.$.
L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Justifier.
   (b) Soit $g:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ z & \longmapsto & g(z)=z^3\end{array}\right.$.
L'application g est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Justifier.

Exercice 2

1. Déterminer les racines carrées de $5+12i$.
2. On considère le polynôme P défini par $P(z)=z^3+2z^2-3iz-1-3i$.
Ce polynôme possède une racine réelle : quelle est-elle ?
3. Déterminer alors toutes les racines de P.

Exercice 3

Si z est un complexe non-réel, on pose $Q(z)=\dfrac{\mathrm{Im}(z^5)}{(\mathrm{Im}(z))^5}$.

On se propose de déterminer le minimum de cette quantité $Q(z)$ lorsque z décrit $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, autrement dit on cherche la valeur de $\min\left\{\dfrac{\mathrm{Im}(z^5)}{(\mathrm{Im}(z))^5} \mid z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\right\}=\min\limits_{z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}\left(\dfrac{\mathrm{Im}(z^5)}{(\mathrm{Im}(z))^5}\right)$.

1. Soit $a=1+i$: donner la forme trigonométrique de a.
En déduire a^5 puis la valeur de $Q(a)=\dfrac{\mathrm{Im}(a^5)}{(\mathrm{Im}(a))^5}$.
2. Donner la formule du binôme de Newton.
3. On pose $z=x+iy$, un complexe non-réel, où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
   (a) Calculer $\mathrm{Im}(z^5)$ en fonction de x et y.

(b) On pose $X = \dfrac{x}{y}$: montrer que $Q(z)$ est un polynôme en X (que l'on déterminera).

4. En déduire, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: $\dfrac{\mathrm{Im}(z^5)}{(\mathrm{Im}(z))^5} \geqslant -4$.
   Pour quelle(s) valeur(s) de z a-t-on égalité dans cette inégalité ?
5. Conclure.

Exercice 4

On se propose de résoudre l'équation suivante : $(E) : x^3 - 12x - 8 = 0$.

1. Etudier les variations, sur $\mathbb{R}$, de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 12x - 8$. En déduire le nombre de solutions réelles de l'équation (E).
2. On cherche une solution de (E) sous la forme $x = u + v$, avec u et v complexes.
   (a) Montrer qu'en fixant le produit $uv = 4$, on doit avoir $u^3 + v^3 = 8$.
   (b) En déduire, sous ces hypothèses, que u^3 et v^3 sont solutions d'une équation du second degré, dont on calculera les solutions sous forme trigonométrique.
   (c) Déterminer les couples (u, v) correspondants, puis les solutions de l'équation (E).
3. Dans cette question, on applique une autre méthode permettant de retrouver les solutions de l'équation (E).
   (a) Linéariser $\cos^3(\theta)$: plus précisément, exprimer $\cos^3(\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\cos(3\theta)$.
   (b) On cherche les solutions de (E) sous la forme $x = a\cos(\theta)$ (avec a et θ réels) : trouver un réel a positif pour que l'équation (E) se ramène à la résolution de $\cos(3\theta) =$ constante.
   (c) Conclure. Comparer avec les résultats obtenus à la question précédente.

Exercice 5 On se propose de démontrer que « *tout complexe non nul peut s'écrire comme la somme de deux complexes dont la différence et le quotient sont des imaginaires purs* ».

Soit $z \in \mathbb{C}^*$: on cherche donc $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ tels que :

$$\begin{cases} \mathbf{(1)} \quad z = u + v \\ \mathbf{(2)} \quad u - v \in i\mathbb{R} \\ \mathbf{(3)} \quad \dfrac{u}{v} \in i\mathbb{R} \end{cases}.$$

1. Montrer que les conditions **(2)** et **(3)** sont équivalentes à $\begin{cases} \mathbf{(4)} \quad \mathrm{Re}(u) = \mathrm{Re}(v) \\ \mathbf{(5)} \quad \mathrm{Re}(u\overline{v}) = 0 \end{cases}$.
2. On pose $u = \alpha + ix$ et $v = \alpha + iy$, avec $(\alpha, x, y) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Déterminer α en fonction de z.

(b) En utilisant (**1**) et (**5**), montrer que x et y sont les racines de l'équation du second degré, d'inconnue X :

$$X^2 - \mathrm{Im}(z)X - \frac{\mathrm{Re}(z)^2}{4} = 0.$$

(c) Conclure.

3. Un exemple : donner une décomposition de $z = 3 + 4i$ en somme de deux complexes dont la différence et le quotient sont des imaginaires purs.

4. Que pensez-vous du même type de problème où la différence et le quotient sont des réels ?

Exercice 6

Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$, un polynôme (*unitaire*, ce qui signifie que le coefficient dominant a_n vaut 1) de degré $n \geqslant 2$, à coefficients complexes.

On note R le maximum du module de ses racines et A le maximum du module de ses coefficients autres que le coefficient dominant. Autrement dit, si α_1,...,α_n sont les racines de P :

$$R = \max(|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|) \text{ et } A = \max(|a_0|, \ldots, |a_{n-1}|).$$

1. (a) Montrer que, si z est une racine du polynôme P, alors on a : $|z|^n \leqslant A\left(\sum_{k=0}^{n-1} |z|^k\right)$.

   (b) En déduire : si z est une racine de P, alors : $|z| \leqslant A + 1$.
   Quelle relation peut-on en déduire entre R et A ?

2. Application : montrer que les images des racines du polynôme

$$Q(X) = (2+i)X^3 - 7iX^2 + (9i-2)X - 3i$$

sont toutes dans un disque de centre O et de rayon $1 + \sqrt{17}$.

Vérification : déterminer les racines du polynôme Q sachant qu'il y en a au moins une qui est réelle, et calculer le maximum de leur module.