La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 COURS et APPLICATIONS DU COURS - Questions largement indépendantes

1. Recopier, et compléter (pas de preuve exigée) :
   (a) $\forall x \in \ldots\ldots$, $\text{Arctan}'(x) = \ldots\ldots.$
   (b) $\forall x \in \ldots\ldots$, $\text{Arccos}'(x) = \ldots\ldots.$
   (c) $\forall x \in \ldots\ldots$, $\text{Arcsin}'(x) = \ldots\ldots.$
   (d) $(\text{Arcsin}(\sin(t)) = t) \Leftrightarrow (t \in \ldots\ldots)$
   (e) $(\text{Arccos}(\cos(t)) = t) \Leftrightarrow (t \in \ldots\ldots)$
   (f) $(\text{Arctan}(\tan(t)) = t) \Leftrightarrow (t \in \ldots\ldots)$
   (g) $\forall x \in \ldots\ldots$, $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ldots\ldots.$
   (h) $\forall x \in \ldots\ldots$, $\text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \ldots\ldots.$
   (i) si θ est un réel, factoriser :
   $$1 + e^{i\theta} = \ldots \qquad \text{et} \qquad 1 - e^{i\theta} = \ldots$$
   puis factoriser
   $$1 + \cos(\theta) = \ldots \qquad \text{et} \qquad 1 - \cos(\theta) = \ldots$$
   (j) Sous réserve d'existence : exprimer en fonction de $\tan(a)$ et de $\tan(b)$,
   $$\tan(a - b) = \ldots\ldots \quad \text{et} \quad \tan(2a) = \ldots\ldots$$

2. Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
$$\text{Arcsin}(x) = \text{Arccos}(2x - 1).$$

3. Résoudre le système suivant, d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
$$\begin{cases} \log_3(x) + \log_2(y) = 5 \\ \log_2(x) \times \log_3(y) = 6 \end{cases}$$

4. On pose $A = \text{Arcsin}\left(\dfrac{4}{5}\right)$ et $B = 2\text{Arccos}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$.
Calculer $\sin(A)$ et $\sin(B)$, puis comparer A et B.

5. On donne l'encadrement suivant de $e = \exp(1)$:
$$\frac{8}{3} \leqslant e \leqslant \frac{11}{4}.$$
En déduire un encadrement de $\text{ch}(1)$ et un encadrement de $\text{sh}(1)$ par des fractions rationnelles mises sous forme irréductible.

6. On pose : $f(x) = 2\text{Arctan}(e^x) - \text{Arctan}(\text{sh}(x))$.
   (a) Quel est l'ensemble de définition de f ? Pour quels x peut-on calculer $f'(x)$?
   Simplifier $f'(x)$ dans ce cas. Conclusion ?
   (b) Soit $A = 2\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{2}\right)$: trouver $r \in \mathbb{Q}$ tel que $A = \arctan(r)$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \text{Arcsin}(x) - 2\text{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$.

1. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.

   On se propose de donner une expression simple de f par deux méthodes différentes.

2. **Première méthode : étude de fonction**

   (a) Sur quel intervalle I, la fonction f est-elle dérivable ? Calculer alors $f'(x)$ pour $x \in I$.

   (b) En déduire une expression simple de f sur D_f.

3. **Seconde méthode : avec des fonctions circulaires auxiliaires**

   (a) Pour tout $x \in D_f$, montrer qu'il existe un unique réel $\theta \in]0, \pi]$ tel que $x = \cos(\theta)$.

   (b) Exprimer $f(x)$ en fonction de la variable θ, simplifier cette expression, et retrouver le résultat de la question (**2b**).

Exercice 3

Calculs préliminaires

1. Simplifier $\text{ch}(\ln 2)$ et $\text{sh}(\ln 2)$.
2. Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I, et $x_0 \in I$: rappeler une équation cartésienne de la droite tangente, au point d'abscisse x_0, à la courbe représentative de f (dans un repère orthonormé).

Exercice

Pour tout k réel, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = \text{sh}(x) + ke^{-x}$.

1. Montrer que, pour tout réel m, il existe une et une seule fonction f_k vérifiant l'égalité :
   $$f_k(\ln 2) = m.$$
   On note désormais g_m cette fonction, et Γ_m sa courbe représentative dans un repère orthonormal. Ainsi, Γ_m contient le point A_m de coordonnées $(\ln 2, m)$.
   Donner l'expression de $g_m(x)$.
2. Donner une équation cartésienne de la tangente T_m à Γ_m au point A_m.
3. Montrer que toutes les droites T_m, lorsque m parcourt $\mathbb{R}$, sont concourantes en un point B dont on précisera les coordonnées.
4. Tracer, dans un même repère orthonormal, l'allure des courbes représentatives des fonctions f_0, $f_{\frac{1}{2}}$ et f_1, accompagnées de leurs tangentes au point d'abscisse $\ln 2$. On donne : $\ln 2 \approx 0,69$.

Exercice 4 `Recherche de points fixes de la fonction exponentielle`

1. Combien existe-t-il de solutions réelles x à l'équation « $\exp(x) = x$ » ?
2. On désire vérifier si l'équation « $\exp(z) = z$ (E) » possède au moins une solution complexe $z \in \mathbb{C}$. On cherche z sous la forme $z = x + iy$ (x, y réels), avec la condition $0 < y < \pi$.
   (a) Montrer que le problème (E) est alors équivalent à la résolution de $\left\{\begin{array}{rcl} \cos(y) & = & xe^{-x} \\ y & = & \sqrt{e^{2x} - x^2} \end{array}\right.$.
   (b) On définit la fonction ψ par $\psi(x) = \text{Arccos}(xe^{-x}) - \sqrt{e^{2x} - x^2}$.
   Déterminer, en le justifiant en détail, les signes de $\psi(0)$ et de $\psi(1)$. Conclure.

Exercice 5

On note $\mathcal{S}$ un ensemble de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ et à valeurs dans $[0, +\infty[$ vérifiant les propriétés suivantes :

- **(1)** $\mathcal{S}$ contient les fonctions α et β où $\alpha(x) = e^x - 1$ et $\beta(x) = \ln(x + 1)$
- **(2)** si $f \in \mathcal{S}$ et $g \in \mathcal{S}$, alors $f + g \in \mathcal{S}$ et $f \circ g \in \mathcal{S}$
- **(3)** si $f \in \mathcal{S}$ et $g \in \mathcal{S}$ avec $f \geqslant g$ sur $[0, +\infty[$, alors $f - g \in \mathcal{S}$.

1. Montrer que, si $f \in \mathcal{S}$ et $g \in \mathcal{S}$, alors $f \times g \in \mathcal{S}$.
2. On suppose désormais que $\mathcal{S}$ vérifie également la propriété suivante :
   - **(4)** $\mathcal{S}$ contient toutes les fonctions constantes (positives).

   Déterminer toutes les fonctions affines qui sont dans $\mathcal{S}$.
3. Déterminer tous les polynômes de degré deux qui sont dans $\mathcal{S}$.