La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 APPLICATIONS DU COURS (questions indépendantes) : *dans cet exercice de vérification des techniques de calculs, il n'est pas demandé de justifier l'existence des intégrales et des développements limités.*

1. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties.
2. Calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $u = \cos(x)$.
3. On pose $f : x \mapsto \dfrac{xe^x - \ln(1+x)}{x^2}$.
   (a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
   (b) Prouver que f est prolongeable par continuité en $x = 0$, puis, ainsi prolongée, que f est dérivable en $x = 0$. Tracer l'allure du graphe de f au voisinage de 0.
4. Donner les solutions $y : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y(x) \end{array} \right.$ de chacune des équations différentielles suivantes :
   (a) (E_1) «$y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 0$».
   (b) (E_2) «$y''(x) - 6y'(x) + 8y(x) = 4$».
   (c) (E_3) «$y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = e^{-3x}$».
5. On désire résoudre, sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$, l'équation différentielle
$$(E) \ \text{«}xy''(x) + (2x+2)y'(x) + (2-3x)y(x) = 9x\text{»}.$$
   (a) Pour tout $x \in I$, on pose : $y(x) = \dfrac{z(x)}{x}$ i.e $z(x) = xy(x)$.
   Montrer que y est solution de (E) sur I si, et seulement si, z est solution sur I de (F), équation différentielle du second ordre à coefficients constants que l'on précisera.
   (b) Résoudre (F).
   (c) Conclure.

Exercice 2 On considère l'équation différentielle :
$$(E) \qquad |x|\, y'(x) + (x+1)\, y(x) = x^2.$$

1. (a) Déterminer les solutions de l'équation (E) sur l'intervalle $I_2 =]0, +\infty[$.
   (b) Montrer que, parmi ces solutions, il y en a une et une seule qui possède une limite finie en 0^+. On note désormais y_2 cette solution unique.
   (c) Déterminer le développement limité d'ordre 2 de $y_2(x)$ en $x = 0^+$ (au voisinage de 0 à droite).
2. (a) Résoudre l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $I_1 =]-\infty, 0[$. On note y_1 les solutions, décrites à l'aide d'un paramètre réel k.

(b) Déterminer le développement limité d'ordre 2 de $y_1(x)$ en $x = 0^-$ (au voisinage de 0 à gauche).

3. On note f, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} y_1(x) & \text{si } x < 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0 \\ y_2(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer qu'il existe un et un seul choix de α pour lequel f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Dans ce cas, pour quelles valeurs de k la fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
   (c) L'équation différentielle (E) possède-t-elle une solution sur l'ensemble $\mathbb{R}$?
   Si oui, tracer l'allure locale, au voisinage de 0, d'une telle solution.

Exercice 3 On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad (x^2+1)\,y'(x) - xy(x) = 1 + x.$$

1. Résoudre (EH), l'équation homogène associée à (E) : on notera y_H la solution générale paramétrée par $k \in \mathbb{R}$. **Vérifier ce résultat !**
2. (a) L'équation (E) possède une solution polynômiale de degré un : déterminer cette solution.
   (b) Donner la solution générale de (E), paramétrée par $k \in \mathbb{R}$ et notée y_k.
3. (a) Calculer $y_k(1)$ et $y_k'(1)$.
   (b) Soit $\mathcal{D}_k$, la tangente en $x = 1$ à la courbe représentative $\mathcal{C}_k$ de y_k : donner une équation de $\mathcal{D}_k$.
   (c) Montrer que les droites $\mathcal{D}_k$ (pour $k \in \mathbb{R}$) sont concourantes en un point A dont on précisera les coordonnées.
4. (a) Donner le développement limité de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 en $x = 0$ puis déterminer celui de $\sqrt{1 + x + \dfrac{x^2}{2}}$ en $x = 0$ à l'ordre 2.
   (b) Calculer le développement limité de $y_k(x)$ en $x = 1$ à l'ordre 2.
   (c) En déduire les positions relatives de $\mathcal{C}_k$ et de $\mathcal{D}_k$ en fonction de k. Illustrer ces situations par des schémas clairs.
5. (a) Montrer qu'il existe des constantes a, b et c, dépendant éventuellement de k, telles que
   $$y_k(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ lorsque } x \to +\infty.$$
   Conséquences pour $\mathcal{C}_k$?
   (b) Même question lorsque $x \to -\infty$.
6. Dessiner, dans un même repère l'allure des courbes $\mathcal{C}_k$ (et leurs éventuelles asymptotes) pour $k = -1$, 0 et 1.

Exercice 4

Préliminaires : si u et v ont des développements limités d'ordre n au voisinage de 0 de la forme

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \circ(x^n) \quad \text{et} \quad v(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + \circ(x^n),$$

alors on sait que la fonction produit $w = u \times v$ possède également un développement au même ordre au voisinage de 0 de la forme

$$w(x) = u(x) \times v(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + \circ(x^n).$$

Il est facile de vérifier qu'on a les relations (cf cours sur coefficients d'un produit de deux polynômes) :

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0, \\ c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \\ c_3 &= a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0, \\ &\cdots, \\ c_n &= \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0. \end{aligned}$$

On pourra utiliser ces résultats sans démonstration.

1. (a) On pose $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = \lambda$.
   Montrer qu'on peut choisir λ pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) On rappelle la définition de la fonction tangente hyperbolique :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}.$$
   On pose $h(x) = f(2x) + x$.
   Montrer, pour $x \neq 0$: $h(x) = \dfrac{x}{\mathrm{th}(x)}$.
   Préciser alors la parité de la fonction h.

2. On admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction f possède un développement limité au voisinage de 0, à l'ordre n, de la forme suivante
   $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} B_k \frac{x^k}{k!} + \circ(x^n) = B_0 + B_1 x + B_2 \frac{x^2}{2!} + B_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots + B_n \frac{x^n}{n!} + \circ(x^n).$$

   (a) Montrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$: $B_{2p+1} = 0$.
   Indication : utiliser la fonction h.

   (b) Calculer B_0, B_1, B_2, B_3.

   (c) En déduire l'étude locale de f au voisinage de 0 : résumer cette étude sur un schéma.

3. (a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:
   $$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{B_i}{i!(n-i)!} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ 0 & \text{si} \quad n > 1 \end{cases}.$$
   Indication : voir les préliminaires.

(b) En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$(n+1)B_n = -\left(B_0 + \binom{n+1}{1}B_1 + \cdots + \binom{n+1}{k}B_k + \cdots + \binom{n+1}{n-1}B_{n-1}\right).$$

(c) Calculer B_4 et B_5.

4. (a) Donner le développement limité d'ordre $2p$, au voisinage de 0, de la fonction h en fonction des coefficients B_k.
Expliciter ce développement pour le cas $p = 3$. Pour vérification, on donne : $B_6 = \frac{1}{42}$.

(b) Vérifier que, pour $t \neq 0$, on a : $\mathrm{th}(t) = \dfrac{h(2t) - h(t)}{t}$, puis en déduire le développement limité à l'ordre $2p - 1$, au voisinage de 0, de la fonction th, à l'aide des coefficients B_k.

(c) Une application : expliciter, avec ce qui précède, le développement limité d'ordre 6, au voisinage de 0, de la fonction th.

Exercice 5 **N'aborder cet exercice que si toutes les autres questions ont été traitées.**

Pour $a \in]0, +\infty[$, on définit le problème $\mathcal{P}_a$ suivant :

$$\mathcal{P}_a : \boxed{f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[,\ f \text{ est } \textbf{dérivable} \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et pour tout } x \in]0, +\infty[,\ f'\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{x}{f(x)}}.$$

1. Soit f, une solution de $\mathcal{P}_a$.

(a) On pose, pour tout $x \in]0, +\infty[$: $g(x) = f(x)f\left(\dfrac{a}{x}\right)$. Montrer que g est une fonction constante.

(b) En déduire qu'il existe un réel $b > 0$ tel que f vérifie l'équation différentielle :

$$(E) : «bxy'(x) - ay(x) = 0».$$

(c) Résoudre l'équation (E).

2. Déterminer les solutions du problème $\mathcal{P}_a$.