La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront <u>encadrés</u> ou $\boxed{\text{soulignés}}$.

Exercice 1 Décrire, en fonction des valeurs du paramètre réel m, l'ensemble des solutions du système :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccccc} (3-m)x & - & 2y & - & 6z & = & 2 \\ 3x & - & (2+m)y & - & 9z & = & 3 \\ -x & + & y & + & (4-m)z & = & -1 \end{array}\right.$$

Exercice 2 On définit la fonction «*ceil*», notée $\lceil\ \rceil$ par, pour tout réel x :

$$\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor .$$

1. Calculer $\lceil x \rceil$ pour $x \in \left\{-\pi, -1, 0, 1, \sqrt{2}\right\}$.
2. (a) Donner la **définition** et une **caractérisation** de $\lfloor x \rfloor$ (partie entière de x) pour $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Quelle **définition** proposez-vous pour $\lceil x \rceil$?
   (c) Montrer la **caractérisation** suivante :
   $$p = \lceil x \rceil \iff \left\{\begin{array}{c} p \in \mathbb{Z} \\ p-1 < x \leqslant p \end{array}\right. .$$
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.
4. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lfloor x \rfloor - \lceil x \rceil$.
   (a) Montrer que f est périodique.
   (b) En déduire la valeur de $f(x)$ en fonction de x.
   (c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{2016} \left(\left\lfloor \frac{k}{100} \right\rfloor - \left\lceil \frac{k}{100} \right\rceil \right)$.

Exercice 3

1. Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $C(B) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MB\}$.
   (a) Montrer que $C(B)$ est stable par combinaison linéaire.
   (b) Montrer que $C(B)$ est stable pour le produit matriciel.
   (c) Montrer : si $M \in C(B)$ est une matrice inversible, alors $M^{-1} \in C(B)$.
2. On définit la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -6 & -5 & -1 \\ 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer **toutes** les matrices colonnes $C_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ vérifiant $AC_1 = (-1)C_1$.
   Désormais C_1 représente l'unique matrice colonne avec $x_1 = 1$: **vérifier** la cohérence de votre résultat !
   De même, on peut déterminer les uniques colonnes C_2 et C_3, de premier terme 1 et

vérifiant : $AC_2 = (+1)C_2$ et $AC_3 = (+2)C_3$.

Les voici (inutile de les chercher) : $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) On définit la matrice (concaténation des trois colonnes) $P = \begin{pmatrix} C_1 & | & C_2 & | & C_3 \end{pmatrix}$ et la matrice $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Comparer AP et PD.

(c) Montrer que P est une matrice inversible et calculer son inverse P^{-1}.

3. (a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.

   (b) On définit les matrices :
$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \Delta_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Montrer qu'il existe trois matrices K_1, K_2 et K_3 dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et trois suites réelles $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \alpha_n K_1 + \beta_n K_2 + \gamma_n K_3.$$

4. (a) Prouver que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a l'équivalence suivante :
$$M \in C(A) \Leftrightarrow P^{-1}MP \in C(D).$$
   (b) Déterminer les éléments de $C(D)$.

   (c) En déduire une description de l'ensemble $C(A)$.

   (d) Retrouver alors le résultat de la question **3b**.

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit la matrice :
$$M(a) = \begin{pmatrix} -2a+1 & -2a \\ a & a+1 \end{pmatrix}.$$

1. <u>Etude des matrices $M(a)$</u>

   (a) Déterminer le rang de $M(a)$ en fonction de a.

   (b) Préciser pour quelles valeurs de a la matrice $M(a)$ est inversible, et calculer son inverse $M(a)^{-1}$ dans ce cas.

   (c) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $M(a) \times M(b) = M(c)$.
   On exprimera c à l'aide de a et b.

   (d) Retrouver ainsi l'inverse de $M(a)$ lorsqu'il existe.

2. <u>Une suite récurrente</u>

   On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = (1-a)\,u_n + a$.

(a) Exprimer u_n en fonction de n.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M(a)^n = M(u_n)$.

(c) Question complémentaire (indépendante de la suite de l'énoncé)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(a) = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

i. Simplifier l'expression de $S_n(a)$.

ii. Calculer la limite $\lim_{a \to 0} (S_n(a))$. Comparer cette valeur à $S_n(0)$.

iii. On suppose, dans cette question uniquement : $0 < a < 1$.
Calculer $\lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{a \to 0^+} \left(\dfrac{S_n(a)}{n+1} \right) \right)$ puis $\lim_{a \to 0^+} \left(\lim_{n \to +\infty} \left(\dfrac{S_n(a)}{n+1} \right) \right)$.
Comparer ces deux résultats.

3. Autre calcul de $M(a)^n$

On définit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que P est inversible, calculer son inverse P^{-1}.

(b) Vérifier que la matrice $D = P^{-1}M(a)P$ est diagonale.

(c) Retrouver l'expression de $M(a)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et la comparer avec celle trouvée à la question **2b**.

4. Encore un autre calcul de $M(a)^n$

On désigne par I la matrice unité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) On note J la matrice définie par : $\forall a \in \mathbb{R}$, $M(a) = I + aJ$.
Calculer J^2 et en déduire J^k pour tout entier $k \geqslant 0$.

(b) En déduire une nouvelle façon de calculer $M(a)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, et comparer ce résultat à celui obtenu aux questions **2b** et **3c**.

Exercice 5 Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$).

1. On note f, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^{n+1} + x^n.$$

(a) Résoudre l'équation «$f(x) = 2$» dans le cas particulier où $n = 2$.

(b) Désormais, on revient au cas général ($n \geqslant 2$).
Déterminer les limites $\lim_{x \to +\infty} (f(x))$ et $\lim_{x \to -\infty} (f(x))$ en distinguant les cas selon la parité de n.

(c) Dresser, en fonction de n, le tableau de variations de la fonction f.

(d) Montrer : pour tout $n \geqslant 2$, $f\left(\dfrac{-n}{n+1}\right) < 2$.

(e) Que vaut $f(1)$? En déduire, en fonction de n, le nombre de solutions x de l'équation :

$$\text{«}x^{n+1} + x^n = 2\text{»}.$$

2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ vérifiant $AP = PD$.

   (b) Montrer que P est inversible et préciser P^{-1}.

3. On considère l'équation matricielle (E_n), d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$(E_n) \qquad \text{«}X^{n+1} + X^n = A\text{»}.$$

   (a) Pour $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $Y = P^{-1}XP$. Montrer :

$$(X \text{ est solution de } (E_n)) \Leftrightarrow (X \text{ est solution de } (E'_n))$$

   où (E'_n) est l'équation «$Y^{n+1} + Y^n = D$».

   (b) Si Y est une solution de (E'_n), montrer : $YD = DY$.
   En déduire que la matrice Y est diagonale.

   (c) Déterminer alors, suivant les valeurs de n, le nombre de solutions Y à (E'_n), puis le nombre de solutions X à (E_n).

   (d) <u>Une application</u> : déterminer les solutions de (E_3) en fonction des solutions réelles de l'équation $x^4 + x^3 = 2$.

Exercice 6 **N'aborder cet exercice que si toutes les autres questions ont été traitées.**

Soit un entier $n \geqslant 2$, et $x_1, x_2, \dots, x_n$, n réels de l'intervalle $[-1, 1]$ vérifiant :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0.$$

Montrer :

$$|x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n| \leqslant \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$