La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront <u>encadrés</u> ou $\boxed{\textit{soulignés}}$.

Exercice 1 Soit f, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$.

1. Rappeler la définition des fonctions sinus et cosinus hyperboliques (sh et ch).
2. (a) Montrer que la fonction f est paire.
   (b) Dresser le tableau de variations de f, limites aux bords comprises, et tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormal.
3. Montrer qu'il existe un unique réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$. Justifier : $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$.
4. Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|f'(x)| \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.
5. On définit la suite de réels $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.
   (b) Montrer : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \ell|$.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
6. On donne $2^{10} \geqslant 10^3$. Comment obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-10} ?

Exercice 2

1. <u>Etude préliminaire d'une suite.</u>
   Soit $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$, la suite définie par, pour $n \geqslant 1$: $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.
   (a) Montrer que les suites $(a_n = u_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(b_n = u_{2n-1})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. On note L sa limite.
   (c) Justifier : $\forall n \geqslant 1$, $u_n < 0$.
2. <u>Etude du polynôme P_n.</u>
   Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit le polynôme P_n par :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots \frac{x^n}{n} = -1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}.$$
   (a) Déterminer les racines du polynôme dérivé P_n', en séparant selon la parité de n, les racines réelles des racines complexes non réelles.
   (b) Montrer que, si r est une racine réelle de P_n, alors $P_n'(r) \neq 0$. On verra dans le cours sur les polynômes que cela implique que les racines réelles de P_n sont simples (i.e de multiplicité un).
3. <u>Etude d'une suite.</u>
   (a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, le polynôme P_n possède une et une seule racine dans l'intervalle $[0, +\infty[$: on note x_n cette racine. Justifier $x_n \in [0, 1]$.
   (b) Pour $n \geqslant 2$: déterminer le signe de $P_{n+1}(x_n)$.
   En déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$, puis sa convergence. On note ℓ sa limite.

4. Quelques résultats utiles
   (a) Calculer la valeur exacte de $C = x_2$. Comparer C et 1.
   (b) On pose, pour $n \geqslant 2$ et $x \in [0,1[$:
   $$G_n(x) = -1 - \ln(1-x) - P_n(x).$$
   Calculer et simplifier $G_n'(x)$ (nombre dérivé de G_n en x).
   (c) En déduire : pour tout $x \in [0,C]$ et pour tout entier $n \geqslant 2$,
   $$|G_n'(x)| \leqslant \frac{C^n}{1-C} \quad \text{puis} \quad |G_n(x)| \leqslant |x|\frac{C^n}{1-C}.$$
5. Conclusion
   (a) Justifier, pour tout $n \geqslant 2$: $x_n \in [0,C]$.
   (b) En déduire : $|1 + \ln(1-x_n)| \leqslant \dfrac{C^{n+1}}{1-C}$.
   (c) Déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 3 On définit la fonction f sur $]0,+\infty[$ par :
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2}\exp\left(-\frac{1}{x}\right).$$

1. (a) Démontrer que f est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.
   (b) Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction de classe C^1 sur $[0,+\infty[$.
   (c) Ainsi prolongée, si on ajoute $f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x \in]-\infty, 0[$, peut-on affirmer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?
2. Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que :
   $$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}}e^{-\frac{1}{x}},$$
   et que
   $$P_{n+1}(x) = x^2P_n'(x) + [1-2(n+1)x]P_n(x) \qquad \textbf{(1)} .$$
3. Expliciter les polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3.
4. On considère la fonction g telle que $g(x) = x^2 f(x)$.
   Démontrer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $g^{(n+1)} = f^{(n)}$.
5. Question de cours : rappeler l'énoncé (complet, hypothèses comprises) du théorème établissant la formule de Leibniz.
6. En utilisant la formule de Leibniz pour calculer $g^{(n+1)}(x)$, démontrer, pour $x > 0$:
   $$P_{n+1}(x) = [1-2(n+1)x]P_n(x) - n(n+1)x^2P_{n-1}(x) \qquad \textbf{(2)} .$$
7. En déduire, pour $x > 0$:
   $$P_n'(x) = -n(n+1)P_{n-1}(x) \qquad \textbf{(3)} .$$
8. Montrer que P_n est solution, sur $]0,+\infty[$, d'une équation différentielle linéaire, homogène, du second ordre à coefficients non-constants, de la forme
   $$x^2y''(x) + a_n(x)y'(x) + b_n(x)y(x) = 0$$
   où $a_n(x)$ et $b_n(x)$ ne dépendent que de x et de n.

Exercice 4 Soit λ, un réel.
On se propose de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$(E_\lambda) \quad : \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) \leqslant f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lambda.$$

1. On suppose, dans cette question, que f est une solution du problème (E_0) (avec $\lambda = 0$).
   (a) Montrer : $f(0) \geqslant 0$.
   (b) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant n f\left(\frac{x}{n}\right).$$
   (c) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) \leqslant 0$, puis $f(0) = 0$.
   (d) Prouver que f est une fonction impaire.
   (e) Conclure.
2. On suppose maintenant que λ est un réel quelconque. Déterminer l'ensemble des fonctions solutions du problème (E_λ).

Exercice 5 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, une fonction continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
Montrer qu'il existe des réels $x_1, x_2, \ldots, x_{2017}$ tels que :

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2017} < 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{2017} f'(x_k) = 2017.$$