La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice **Questions proches du cours et largement indépendantes.**

1. Rappeler, hypothèses comprises, la formule de Taylor pour les polynômes.
2. Soit $r \in \mathbb{K}$, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $m \in \mathbb{N}^*$ ($\mathbb{K}$ représente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
   Donner la définition de
   « r est une racine d'**ordre de multiplicité** m du polynôme P »
   puis une caractérisation de cette proposition faisant intervenir des dérivées de P.
3. Soit $A = X^4 + 2X^3 + X + 1$ et $B = X^2 - 2X + 2$. Effectuer la division euclidienne de A par B.
   Calculer $B(1 + i)$ et en déduire $A(1 + i)$.
4. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que 2 soit une racine d'ordre **au moins trois** du polynôme
   $$P = X^4 + (-a - 3)X^3 + 3aX^2 + 4X - 4a.$$
   Factoriser alors le polynôme P sur $\mathbb{R}[X]$.
5. Déterminer les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$, de degré trois, tels que
   $$P(1) = P^{(2)}(1) = 1 \quad \text{et} \quad P'(1) = P^{(3)}(1) = -1.$$
6. (a) A l'aide d'une étude rapide de fonction, prouver que le polynôme $P(X) = X^3 + 3X^2 + 2$ possède exactement une racine réelle et deux racines complexes non réelles.
   (b) Déterminer les triplets de réels $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que
   $$a < b < c$$
   et vérifiant :
   $$\left\{\begin{array}{ccccccc} \dfrac{1}{a} & + & \dfrac{1}{b} & + & \dfrac{1}{c} & = & 0 \\ & & & & abc & = & -2 \\ a^2 & + & b^2 & + & c^2 & = & 9 \end{array}\right. .$$

PROBLEME Une serrure de coffre-fort possède n boutons numérotés de 1 à n (avec $n \geqslant 1$). Une *n-combinaison* consiste à pousser dans un certain ordre tous les boutons. Chaque bouton n'est poussé qu'une seule fois mais il est possible de pousser simultanément plusieurs boutons.

La modélisation est effectuée de la façon suivante : pour tout entier $n \geqslant 1$, on appelle *n-combinaison* toute suite ordonnée $(P_1, P_2, \ldots, P_j)$ de j parties $P_1, P_2, \ldots, P_j$ de l'ensemble $[[1, n]] = \{1, 2, \ldots, n\}$ (avec $1 \leqslant j \leqslant n$) ; ces parties sont toutes non vides, deux à deux disjointes et leur réunion est égale à l'ensemble $[[1, n]]$.

On note a_n le nombre de n-combinaisons.

Par exemple :

- pour $n = 1$, il y a une seule 1-combinaison, qui est $(\{1\})$.
- pour $n = 2$, il y a trois 2-combinaisons, qui sont $(\{1\}, \{2\})$ et $(\{2\}, \{1\})$ et $(\{1, 2\})$. La première 2-combinaison consiste à appuyer d'abord sur le bouton 1 puis sur le bouton 2, la deuxième à appuyer d'abord sur le 2 puis sur le 1, la troisième à appuyer simultanément sur les boutons 1 et 2.
- par convention, on pose $a_0 = 1$.

1. `Préliminaires - questions de cours.`
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E_n, un ensemble à n éléments (par exemple $E_n = [[1, n]]$). Il n'est pas demandé de démonstration dans les deux questions suivantes.

(a) Quel est le nombre de parties de E_n possédant k éléments (avec $0 \leqslant k \leqslant n$) ?

(b) Quel est le nombre de bijections de E_n vers E_n ?

2. `Quelques exemples`

(a) Soit $n \geqslant 1$. Combien y a-t-il de n-combinaisons pour lesquelles les boutons sont poussés l'un après l'autre ?

(b) On choisit, dans cette question, $n = 3$: dresser la liste exhaustive des 3-combinaisons et déterminer la valeur de a_3.

3. `Une formule de récurrence`
Soit $n \geqslant 1$ et $S = (P_1, P_2, \dots, P_j)$ une n-combinaison.

(a) Soit $k \in [[1, n]]$: combien y a-t-il de choix possibles pour la partie P_1 lorsque l'on impose $\mathrm{card}(P_1) = k$?

(b) Combien y a-t-il de n-combinaisons S dont le premier élément P_1 possède k éléments ?

(c) Montrer :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} \quad \text{puis} \quad a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a_k.$$

(d) Vérifier, à l'aide de la formule précédente, la valeur de a_3 trouvée à la question **(2b)**.

4. `Une majoration de` a_n

(a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \dfrac{a_n}{n!}$. Démontrer :

$$\text{pour tout entier } n \geqslant 1,\ b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{n-k}}{k!}.$$

(b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction polynomiale T_n par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

A l'aide d'un raisonnement par récurrence, prouver :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \text{pour tout } x \in [0, +\infty[, \quad e^x \geqslant T_n(x).$$

<u>Indication</u> : qui est $T'_{n+1}(x)$?

(c) En déduire : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n \leqslant \frac{1}{(\ln 2)^n}.$$

5. `Liens entre les` a_n `et une fonction` f
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]-\infty, \ln(2)[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2 - e^x}.$$

(a) Justifier que f est de classe C^∞ sur I.

(b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, dériver n fois, par rapport à x, la quantité $f(x)\,(2 - e^x)$.

(c) Pour $n \geqslant 1$, en déduire une expression de $f^{(n)}(0)$ à l'aide de $f^{(0)}(0), f^{(1)}(0), \dots, f^{(n-1)}(0)$.

(d) Justifier alors : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = f^{(n)}(0).$$

(e) Calculer le développement limité, au voisinage de $x = 0$ à l'ordre 3, de $f(x)$.
Vérifier à nouveau la validité de la valeur de a_3 trouvée à la question **(2b)**.

Les questions suivantes sont largement indépendantes de ce qui précède.

6. `Construction d'une suite de polynômes`

(a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un **polynôme** P_n tel que :

$$\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(e^x)}{(2 - e^x)^{n+1}} \qquad (*).$$

Au passage, on aura établi une relation du type $P_{n+1} = X\left(\alpha P_n + (\beta + \gamma X)P'_n\right)$, où α, β et γ sont des constantes, dépendant éventuellement de n, que l'on précisera.

(b) Justifier que, à n fixé, il y a un unique polynôme P_n vérifiant la relation $(*)$.

(c) Donner les polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3.

(d) Prouver, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, que P_n est de degré n. Quel est son coefficient dominant ?

(e) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, que vaut $P_n(0)$? Que représente $P_n(1)$?

7. `Etude d'une racine de` P_n

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence d'un polynôme Q_n tel que $P_n = XQ_n$.

(b) Quelle relation a-t-on entre Q_{n+1}, Q_n et Q'_n ?

(c) On définit : $u_n = Q_n(0)$. Déterminer u_n en fonction de n.

(d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 0 est une racine simple de P_n.

8. RETOUR `vers le DNS n°10`

On a étudié $\left\{ n \atop p \right\}$, le nombre de partitions en p classes d'un ensemble à n éléments.

On rappelle

- les conventions : $\left\{ 0 \atop 0 \right\} = 1$ et pour $n \geqslant 1$, $p \geqslant 1$: $\left\{ n \atop 0 \right\} = \left\{ 0 \atop p \right\} = 0$.
- la formule du triangle de Stirling (pour $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$) : $\left\{ n \atop p \right\} = p\left\{ n-1 \atop p \right\} + \left\{ n-1 \atop p-1 \right\}$.
- pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$: $\left\{ n+1 \atop p+1 \right\} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\{ k \atop p \right\} = \sum_{k=p}^{n} \binom{n}{k} \left\{ k \atop p \right\}$.

Soit $n \geqslant 0$. Justifier la formule :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} k! \left\{ n \atop k \right\}$$

(a) d'abord à l'aide d'un raisonnement utilisant un dénombrement.

(b) puis à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur n.