La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront <u>encadrés</u> ou soulignés.

Exercice 1 Pour $n \geqslant 1$, on définit :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+n}, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n} \quad \text{et} \quad w_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\left(1+e^k\right)}{k+n}.$$

1. Montrer que les suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent et préciser leur limite.
2. Montrer que pour $x \geqslant 0$: $x \leqslant \ln(1+e^x) \leqslant x+1$.
3. En déduire un équivalent de w_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 2 On considère F et G, les sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^3$ suivants :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \text{ tels que } y = z\}$$
$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \text{ tels que } x - y = 0 \text{ et } z - 2y = 0\}.$$

1. (a) Donner une famille génératrice de F.
   (b) Donner une famille génératrice de G.
   (c) Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
2. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G.
   Soit $\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $p(\overrightarrow{u})$ en fonction de x, y et z.
3. Soit q l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par
$$q : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & q(x,y,z) = (x+y-z,y,y) \end{array} \right. .$$
   (a) Montrer que q est un projecteur de E.
   (b) Donner une famille génératrice du noyau $\mathrm{Ker}(q)$.
   (c) Vérifier que $\mathrm{Ker}(q)$ et G sont en somme directe.
   (d) Montrer que $\mathrm{Im}(q) = F$.
   (e) En déduire [1] que $poq = q$ et que $qop = p$.
4. On pose $r = p + q$.
   (a) Est-ce que r est un projecteur de E ?
   (b) Pour $n \geqslant 2$, calculer r^n en fonction de r.
5. On notera I l'application identité de $\mathbb{R}^3$. Montrer que
   (a) $\mathrm{Im}(r - 2I) \subset \mathrm{Ker}(r)$
   (b) $\mathrm{Im}(r) \subset \mathrm{Ker}(r - 2I)$.
6. (a) Ecrire I comme combinaison linéaire de r et $(r - 2I)$.
   (b) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(r) \oplus \mathrm{Ker}(r - 2I)$.
   (c) Donner l'expression du projecteur h sur $\mathrm{Ker}(r)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(r - 2I)$.

1. <u>Remarque</u> : il n'est pas nécessaire d'avoir calculé p à la question **(2.)** pour répondre à celle-ci, ni aux suivantes.

Exercice 3

1. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.
2. Soit la fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :
$$g_n(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n}$$
où n désigne un entier naturel.
Prouver que, pour tout réel $x \in [0,1]$, on a
$$g_n(x) = \frac{1}{1+x^2} + (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$
3. On définit la suite $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ par :
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$
Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, on a :
$$u_n = I + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n+2}\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$
4. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - I| \leqslant \dfrac{1}{2n+3}$.
5. Montrer que la suite u converge, préciser la valeur de sa limite, puis indiquer une méthode permettant d'obtenir une valeur approchée de π à 10^{-5} près.

Exercice 4

Pour tout $P \in E = \mathbb{R}_2[X]$, on pose
$$f(P) = P(2)\tilde{1} + P(1)X + P(2)X^2$$
où $\tilde{1}$ désigne le polynôme constant égal à 1.

1. Montrer que f est un **endo**morphisme de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer le noyau de f (on en précisera une base).
3. Justifier que $\mathrm{Im}(f)$, l'image de f, est incluse dans un plan vectoriel H de E (à préciser), puis prouver l'égalité $\mathrm{Im}(f) = H$.
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $E = \mathbb{R}_2[X]$.
5. On note φ, le projecteur sur $\mathrm{Im}(f)$ dans la direction de $\mathrm{Ker}(f)$.
Justifier $\varphi \circ f = f \circ \varphi$.

Exercice 5

Soit E, un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, E n'étant pas réduit à son vecteur nul $\vec{0}_E$.
On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des endomorphismes f de E qui vérifient $f^3 = f$ (i.e) $f \circ f \circ f = f$:
$$\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid f^3 = f\}.$$

1. Vérifier que tous les projecteurs et toutes les symétries vectorielles de E sont dans $\mathcal{D}$.
2. Prouver, à l'aide d'un argument simple et efficace, que l'ensemble $\mathcal{D}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

3. On rappelle que $GL(E)$ désigne l'ensemble des automorphismes de l'espace vectoriel E.
   Prouver l'équivalence :
   $$(f \in \mathcal{D} \cap GL(E)) \Leftrightarrow (f \text{ est une symétrie vectorielle de } E).$$
4. Montrer que, si f est un élément de $\mathcal{D}$, alors, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, f^k est aussi un élément de $\mathcal{D}$.
5. Soit f, un élément de $\mathcal{D}$.
   (a) Montrer que son noyau $\operatorname{Ker}(f)$ et son image $\operatorname{Im}(f)$ sont en somme directe.
   (b) Montrer que f^2 est un projecteur de E.
   (c) De manière générale, si g est un endomorphisme de E, quelles relations existe-t-il entre $\operatorname{Ker}(g)$, $\operatorname{Ker}(g^2)$ et $\operatorname{Ker}(g^3)$? Prouver ces relations.
   (d) En déduire les égalités $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$ et $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$.
   (e) $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont-ils supplémentaires dans E ?
6. Un exemple : désormais, on pose $E = \mathbb{R}^3$. On définit l'endomorphisme $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par
   $$h(x, y, z) = (2x - 2z, -y, x - z).$$
   (a) h est-elle une symétrie vectorielle de $E = \mathbb{R}^3$? Un projecteur de $E = \mathbb{R}^3$?
   (b) Prouver que h est un élément de $\mathcal{D}$.
   (c) Préciser des équations et des systèmes générateurs du noyau et de l'image de h.
   Justifier qu'ils sont supplémentaires dans E.
   (d) On note p, le projecteur sur $\operatorname{Im}(h)$ de direction $\operatorname{Ker}(h)$.
   Donner l'expression de $p(x, y, z)$.
7. Un autre exemple :
   (a) Montrer que la famille de fonctions $\mathcal{F} = (\tilde{1}, \operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ est libre.
   (b) On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E engendré par la famille $\mathcal{F}$: $E = \operatorname{vect}(\tilde{1}, \operatorname{ch}, \operatorname{sh})$.
   A toute fonction $f \in E$, on associe $\Delta(f) = f'$ (la dérivée de f).
   Montrer que Δ est un **endo**morphisme de E.
   (c) Prouver que Δ est un élément de $\mathcal{D}$.
   (d) Préciser une base du noyau de Δ et une base de son image.