La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1

1. Un résultat préliminaire : soit E, un espace vectoriel de dimension N ($N \geqslant 2$).
   On note H_1 et H_2, deux sous-espaces de E vérifiant
   $$\dim(H_1) = \dim(H_2) = N - 1 \quad \text{et} \quad H_1 \neq H_2.$$
   (a) Prouver : $H_1 + H_2 = E$.
   (b) En déduire la dimension de $H_1 \cap H_2$.
2. Pour tout polynôme P de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$, on pose
   $$f(P) = \frac{X^2 - 1}{2} P'' - XP' + P.$$
   On note $\mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3)$, la base canonique de E.
   Montrer que f est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_3[X]$.
3. Calculer $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$, la matrice de f relativement à la base $\mathcal{C}$.
4. Montrer que f est un projecteur de E.
5. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est un plan vectoriel dont on donnera une base.
6. Montrer l'inclusion
   $$\mathrm{Im}(f) \subset G$$
   où $G = \{Q \in \mathbb{R}_3[X] \mid Q'(1) = Q'(-1) = 0\}$.
7. On considère l'application linéaire $\varphi : \left| \begin{array}{rcl} E = \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \varphi(P) = P'(1) \end{array} \right.$.
   (a) Montrer que φ est surjective.
   (b) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi)$, le noyau de l'application φ.
8. (a) Justifier que G est un sous-espace de $E = \mathbb{R}_3[X]$.
   (b) En s'aidant du résultat préliminaire, donner la dimension de G.
9. Prouver l'égalité $\mathrm{Im}(f) = G$.
10. Préciser une base de $\mathrm{Im}(f)$.
11. $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont-ils supplémentaires dans $E = \mathbb{R}_3[X]$?

Exercice 2

Soit φ définie par $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}$ et f par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f a une parité intéressante.
   On peut donc restreindre l'étude de f à $[0, +\infty[$: on supposera désormais $x > 0$.
3. Etude en $+\infty$

(a) Après avoir étudié la monotonie de φ, montrer :
$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$
Un dessin sera fortement apprécié.

(b) Préciser la limite de f en $+\infty$.

4. Dérivée

   (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

   (b) Donner le signe de f' sur $[0, +\infty[$

   (c) Donner le tableau de variations de f (limites aux bords comprises) et son graphe sur $\mathbb{R}$.

5. Recherche d'un équivalent en $+\infty$

   (a) Donner le développement limité de f' à l'ordre 2 en $x = 0$.

   (b) Quel développement limité peut-on en déduire sur f ? Conséquence graphique ?

   (c) A l'aide d'un changement de variable simple donner une relation entre $f(x)$ et $f\left(\frac{1}{2x}\right)$.

   (d) En déduire un équivalent de f en $+\infty$. Quelle information supplémentaire le développement limité sur f fournit-il ?

Exercice 3

On réalise l'expérience aléatoire suivante : une boîte A contient initialement deux jetons, portant chacun le nombre 0, et une boîte B contient deux jetons portant chacun le nombre 1. On choisit, au hasard et simultanément, un jeton de A et un jeton de B. On place alors :

- dans B, le jeton de A choisi
- dans A, le jeton de B choisi

puis, on recommence. On bout de n échanges de ce type, on appelle S_n la somme des deux nombres des jetons de la boîte A, et

- u_n = « la probabilité que S_n soit égale à 0 »
- v_n = « la probabilité que S_n soit égale à 1 »
- w_n = « la probabilité que S_n soit égale à 2 ».

Il est clair que $S_0 = 0$, et que, par conséquent
$$u_0 = 1, \quad v_0 = 0 \quad \text{et} \quad w_0 = 0.$$
Question préliminaire : justifier que les trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construites vérifient les relations suivantes :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = (1/4)v_n \\ v_{n+1} = u_n + (1/2)v_n + w_n \\ w_{n+1} = (1/4)v_n \end{cases}.$$
Donc, tout naturellement, on définit la matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$, matrice qu'on se propose d'étudier ici.

1. Que vaut le rang de la matrice M ? On attend ici une explication précise ou un calcul détaillé. La matrice M est-elle inversible ? Si oui, préciser son inverse.
2. On appelle f, l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice M.
   (a) Que vaut $f(x, y, z)$?
   (b) Préciser une base du noyau $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de l'image $\mathrm{Im}(f)$.
   (c) $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont-ils des sous-espaces supplémentaires de E ?
3. On pose, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $P(\lambda) = \text{dét}(M - \lambda.I)$, où I désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Vérifier que P est un polynôme de degré trois : en déterminer les racines. En particulier, vérifier qu'elles sont toutes simples et réelles : on les note λ_1, λ_2 et λ_3 avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
   (b) On <u>admet</u> que $\det(M) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ et $\mathrm{Tr}(M) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ (où $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{3} M[i, i]$ désigne la trace de la matrice M, somme des termes de la diagonale de M).
   Utiliser ces deux renseignements afin de vérifier les valeurs des λ_k trouvés.
4. Pour chaque valeur de $k \in \{1, 2, 3\}$, on définit le sous-espace $E_k = \mathrm{Ker}(f - \lambda_k \mathrm{id})$, où id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Justifier <u>sans calcul</u> que, pour $k \in \{1, 2, 3\}$, E_k n'est pas réduit au vecteur nul $\vec{0}$ de $E = \mathbb{R}^3$.
   (b) Pour chaque $k \in \{1, 2, 3\}$, montrer que E_k est une droite vectorielle dont on précisera un vecteur directeur $\vec{v}_k$.
   (c) En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ de $E = \mathbb{R}^3$, de la forme[1]
   $$\vec{a} = (1, *, *), \quad \vec{b} = (1, *, *) \quad \text{et} \quad \vec{c} = (1, *, *)$$
   sur laquelle la matrice de f est la matrice $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5. On note $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$ et Q, la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ vers la base $\mathcal{B}$.
   (a) Expliciter Q et Q^{-1}. On factorisera la matrice Q^{-1} sous la forme $Q^{-1} = \frac{1}{6}(...)$.
   (b) Ecrire une formule reliant les matrices D, M, Q et Q^{-1}.
   (c) Pour tout entier $n \geqslant 0$, que vaut D^n ?
   (d) En déduire une expression explicite de M^n, pour tout entier $n \geqslant 0$.
6. <u>Retour à l'étude des suites u, v et w</u> :
   (a) En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, quelle relation existe-t-il entre X_{n+1} et X_n ?
   Entre X_n et X_0 ?

1. Petite aide : les valeurs des $*$ appartiennent à l'ensemble $\{-2, -1, 0, 1, 4\}$.

(b) En déduire, à l'aide l'étude de la matrice M, une expression, pour tout entier $n \geqslant 0$, des termes u_n, v_n et w_n.

(c) <u>Vérification</u> : il est clair que S_1 (somme des numéros des jetons de la boite A à la première étape) vaut 1. Que valent donc u_1, v_1 et w_1 ?
Vérifier ces résultats à l'aide des formules trouvées en **6b**.

(d) Préciser les valeurs des limites des trois suites u, v et w.
Elles constituent *la loi limite de la variable aléatoire* S_n.

Exercice 4 Soit f, un endomorphisme de $\mathbb{R}^6$: on suppose $\operatorname{rg}(f^2) = 3$.
Le but est de déterminer les valeurs possibles de $\operatorname{rg}(f)$.

1. Justifier : $\operatorname{rg}(f) \geqslant 3$.
2. On suppose $\operatorname{rg}(f) = 6$: obtenir une contradiction.
3. On suppose $\operatorname{rg}(f) = 5$: on définit alors g, la restriction de f à $\operatorname{Im}(f)$.
   On rappelle que g est définie par : $g : \left| \begin{array}{rcl} \operatorname{Im}(f) & \longrightarrow & \mathbb{R}^6 \\ \vec{x} & \longmapsto & g(\vec{x}) = f(\vec{x}) \end{array} \right.$.
   (a) Montrer : $\operatorname{rg}(g) \geqslant 4$.
   (b) Conclure.
4. Montrer que les valeurs potentielles de $\operatorname{rg}(f)$ obtenues aux questions précédentes peuvent être atteintes. Pour cela, on pourra exhiber une matrice représentant f et justifier ce choix.

Exercice 5 On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées 2×2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On dit que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ <u>si et seulement si</u> A est inversible **et** $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

1. Soit A inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$: quelles sont les valeurs possibles pour $\det(A)$?
2. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telles $A + kB$ soit inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
   Montrer que $A + 5B$ est encore inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
3. Donner un exemple de deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A+kB$ est inversible (dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$) pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, mais $A + 5B$ n'est pas inversible (dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$).