La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 On considère, sur l'intervalle $]-1,0[$, l'équation différentielle (E) :

$$xy'(x)+y(x)+\frac{x}{x+1}=0.$$

1. Résoudre l'équation homogène associée sur $]-1,0[$.
2. Déterminer une solution particulière de (E) à l'aide de la méthode de la variation de la constante.
3. Donner la solution générale de (E).
4. (a) Montrer qu'il existe une seule solution de (E) prolongeable par continuité en $x=0^-$. On note f cette solution.
   (b) Etablir que f possède un développement limité, que l'on précisera, d'ordre 2 au voisinage de 0. Interprétation ?

Exercice 2 Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Déterminer les solutions $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de l'équation différentielle
$$y''-5y'+6y=6x+4e^{-x}.$$
2. Montrer que l'équation
$$y''-4y'+5y=xe^{2x}$$
admet une unique solution y telle que $y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Exercice 3 Soit la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=(1+x-x^2+x^3)e^{-x}.$$

1. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation «$f(x)=x$» admet, sur l'intervalle $[0,1]$, une unique solution. On notera α cette solution.
3. Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\varphi(x)=x(1-x)(3-x).$$
   (a) Montrer, pour tout $x\in[0,1]$: $0\leqslant x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}$.
   (b) En déduire que, pour tout $x\in[0,1]$,
$$|\varphi(x)|\leqslant\frac{3}{4}$$
   puis que f est $\frac{3}{4}-$lipschitzienne sur $[0,1]$.
4. On définit la suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$u_0=0 \quad \text{et} \quad u_{n+1}=f(u_n) \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}.$$
   (a) Montrer, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n\in[0,1]$.

(b) Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{3}{4}|u_n - \alpha|$.

(c) Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(d) Indiquer une méthode permettant d'obtenir une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

PROBLEME 1

Partie I - Etude d'une suite

On définit la suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par son terme général

$$a_n = \frac{\sqrt{n}\dbinom{2n}{n}}{4^n} \text{ pour tout entier } n \geqslant 1.$$

1. Calculer la valeur de a_1.
2. Calculer et simplifier, pour tout entier $n \geqslant 1$, le rapport $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.
3. Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$a_n \leqslant \sqrt{\frac{n}{2n+1}}.$$
4. Déterminer le sens de variation de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et montrer qu'elle converge vers un réel ℓ vérifiant :
$$\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$
5. On rappelle la `formule de Stirling`, qui donne un équivalent de la factorielle de n lorsque n tend vers l'infini :
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$
Utiliser cet équivalent pour donner la valeur exacte de ℓ.

Partie II - Un peu de probabilités

Une urne contient $2n$ boules dont n boules blanches et n boules noires (avec $n \geqslant 1$). On vide l'urne en effectuant n tirages au hasard de 2 boules simultanément. On désire calculer la probabilité d'obtenir des boules de 2 couleurs à chacun des tirages.

On considère les événements :

- S_n =«on obtient des boules de 2 couleurs différentes à chaque tirage»
- pour tout $k \in [[1, n]]$, A_k =«on obtient des boules de 2 couleurs différentes au $k^{\text{ième}}$ tirage».

On note, pour tout $n \geqslant 1$: $p_n = \mathbb{P}(S_n)$.

1. Si $n = 1$: que vaut $p_1 = \mathbb{P}(S_1)$?
2. Exprimer S_n à l'aide des événements $A_1, \ldots, A_n$.

3. Montrer que la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

4. Calcul de $\mathbb{P}(A_1)$
   Soit un entier $n \geqslant 1$.
   (a) Combien y a-t-il de tirages possibles (et équiprobables) au premier tirage ?
   (b) Parmi ces tirages, combien donnent des boules de 2 couleurs différentes ?
   (c) En déduire : $\mathbb{P}(A_1) = \dfrac{n}{2n-1}$.

5. Cas général
   Soit un entier $n \geqslant 2$.
   (a) On suppose que l'événement $B_k = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i$ est réalisé (pour $k \geqslant 2$).
   Quelle est la composition de l'urne ?
   (b) Montrer :
   $$\mathbb{P}_{B_k}(A_k) = \frac{n-k+1}{2n-2k+1}.$$
   (c) Simplifier et exprimer, à l'aide des quantités $n!$, $(2n)!$ et 2^n, les produits
   $$\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n) \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n}(2k-1) = 1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1).$$
   (d) Montrer, pour tout $n \geqslant 1$:
   $$p_n = \frac{2^n}{\dbinom{2n}{n}}.$$

6. Exprimer p_n à l'aide de a_n, et donner un équivalent simple de p_n lorsque $n \to +\infty$.

PROBLEME 2 L'objectif de cet exercice est d'étudier une méthode de calcul approché d'intégrales, appelée `méthode de Simpson`[1]. On identifiera polynômes et fonctions polynômiales associées.

PARTIE A

Lorsque f est une fonction continue sur le segment $[-1,1]$, on définit les réels :
$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad S(f) = \frac{f(-1)+4f(0)+f(1)}{3}$$

Lorsque f est une fonction de classe C^n sur $[-1,1]$ (i.e $f \in C^n([-1,+1])$), on définit la constante
$$M_n(f) = \operatorname*{Sup}_{t\in[-1,1]} |f^{(n)}(t)| = \operatorname*{Sup}_{[-1,1]} |f^{(n)}|$$

1. Un peu de calculs pour s'échauffer : déterminer $I(f)$ et $S(f)$ quand

   $*$ f est une fonction continue et impaire sur $[-1,+1]$. $*$ $f(t) = t^4$.
   $*$ $f(t) = \dfrac{1}{t+2}$. $*$ $f(t) = \dfrac{1}{t^2+2t+3}$.

1. Thomas Simpson, 1710-1761, mathématicien anglais.

2. On admettra (sans peine !) que I et S définissent des formes linéaires sur $\mathbb{R}_3[X]$ i.e des applications linéaires de $\mathbb{R}_3[X]$ vers $\mathbb{R}$.
   Calculer les images de X^k ($k = 0, \ldots, 3$) par ces deux formes linéaires.
   Montrer que l'on peut en déduire que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a $I(P) = S(P)$.

3. On considère l'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & \varphi(P) = (\ P(-1)\ ,\ P(0)\ ,\ P(+1)\ ,\ P'(0)\ ) \end{array} \right.$.
   (a) Montrer que φ une application linéaire et déterminer son noyau.
   (b) En déduire que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
   (c) On note $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Déterminer les polynômes P_1, P_2, P_3 et P_4 de $\mathbb{R}_3[X]$ tels que $\varphi(P_i) = \vec{e}_i$ pour $i = 1, \ldots, 4$.
   (d) Pourquoi la famille $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ est-elle une base de $\mathbb{R}_3[X]$?

4. On fixe, dans cette question (et les quatre suivantes), une fonction f définie et de classe C^4 sur le segment $[-1, +1]$ (i.e $f \in C^4([-1, +1])$). On note alors $f^* \in \mathbb{R}_3[X]$ l'unique fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à trois telle que $\varphi(f^*) = (f(-1), f(0), f(+1), f'(0))$.
   Justifier l'existence et l'unicité de f^*, puis expliciter f^* à l'aide de la base $\mathcal{B}$ (et de f !).

5. Rappeler l'énoncé du **théorème de Rolle** (<u>hypothèses comprises</u>).

6. Soit α, un réel de $[-1, 1]$ différent de -1, 0 et $+1$ (i.e. $\alpha \in]-1, 0[\cup]0, 1[$).
   On note H le polynôme $H = X^2(X^2 - 1)$. On définit alors la fonction
   $$h_\alpha : \left| \begin{array}{ccc} [-1, +1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & h_\alpha(x) = f(x) - f^*(x) - K \times H(x) \end{array} \right.$$
   où la constante réelle K est choisie de telle sorte que $h_\alpha(\alpha) = 0$.
   (a) Donner une valeur de x pour laquelle on peut affirmer que $h'_\alpha(x) = 0$.
   (b) Pour quelles valeurs de x peut-on affirmer que $h_\alpha(x) = 0$?
   (c) Montrer h'_α s'annule en 4 points distincts de l'intervalle $[-1, 1]$.
   <u>Indication</u> : on peut utiliser les *deux* questions précédentes et appliquer avec précision le théorème de Rolle. On pourra dans un premier temps raisonner en supposant $\alpha > 0$ (i.e) $\alpha \in]0, 1[$, puis dans un second temps, examiner plus rapidement le cas où $\alpha < 0$.
   (d) En utilisant plusieurs fois le théorème de Rolle, montrer qu'il existe un réel $d \in [-1, +1]$ tel que $h_\alpha^{(4)}(d) = 0$. Vérifier alors : $K = \dfrac{f^{(4)}(d)}{4!}$.
   (e) Montrer enfin que : $|f(\alpha) - f^*(\alpha)| \leqslant \dfrac{M_4(f)}{4!}\, \alpha^2(1 - \alpha^2)$.

7. En déduire : $\forall t \in [-1, +1]$, $|f(t) - f^*(t)| \leqslant \dfrac{M_4(f)}{4!}\, t^2(1 - t^2)$.

8. En déduire : $|I(f) - I(f^*)| \leqslant \dfrac{M_4(f)}{90}$. Puis justifier : $|I(f) - S(f))| \leqslant \dfrac{M_4(f)}{90}$.

9. On considère ici la fonction f définie par $f(t) = t^4$. Rappeler les valeurs de $I(f)$ et $S(f)$ dans ce cas, puis vérifier que l'on a l'égalité $|I(f) - S(f))| = \dfrac{M_4(f)}{90}$.
   La constante dans la majoration d'erreur précédente ne peut donc pas être améliorée.

PARTIE B

Cette partie présente une application performante de ce qui précède, pour le calcul approché d'intégrales.

1. Soit $a < b$, et une fonction g de classe C^4 sur le segment $[a, b]$ (i.e) $g \in C^4([a, b])$.
   (a) Déterminer deux réels β et γ tels que la fonction $\omega : \left|\begin{array}{rcl} [-1,+1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \omega(x) = \beta x + \gamma \end{array}\right.$ réalise une bijection de $[-1, +1]$ vers $[a, b]$.
   (b) En déduire :
   $$\boxed{\left|\int_a^b g(t)\mathrm{d}t - \frac{b-a}{6}\left(g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b)\right)\right| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2880}M_4(g)}$$
   où, bien entendu, $M_4(g) = \operatorname*{Sup}_{[a,b]}|g^{(4)}|$. On pourra poser et utiliser la composée $f = g \circ \omega$.
   (c) <u>Une application numérique</u> : utiliser la formule précédente pour obtenir une valeur approchée de l'intégrale $J = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. Quelle approximation de $\ln 2$ en tire-t-on ?
2. On considère une fonction f de classe C^4 sur $[0, 1]$, (i.e) $f \in C^4([0, 1])$.
   En posant $x_k = \dfrac{k}{2n}$ et $S_n = \dfrac{1}{6n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})]$, montrer que
   $$\boxed{\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - S_n\right| \leqslant \frac{CM_4(f)}{n^4}}$$
   où $C = \dfrac{1}{2880}$ et, bien entendu, $M_4(f) = \operatorname*{Sup}_{[0,1]}|f^{(4)}|$.
   <u>Une indication</u> : on commencera par utiliser la relation de Chasles pour écrire l'intégrale sous forme d'une somme.
3. <u>Application numérique</u> : en prenant $f(x) = \dfrac{4}{1+x^2}$, comment choisir n pour que S_n soit une valeur approchée à 10^{-3} près de π ? <u>Indication</u> : $f^{(4)}(x) = \dfrac{96(5x^4 - 10x^2 + 1)}{(1+x^2)^5}$.