La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 QUESTIONS DE COURS - **Aucune preuve n'est demandée**.

1. Si Q est un nombre complexe et N un entier naturel, simplifier la somme suivante :
$$1 + Q + Q^2 + \cdots + Q^N = \sum_{k=0}^{N} Q^k = \ldots ?$$
2. Compléter (i.e factoriser), si θ est un réel :
$$1 + e^{i\theta} = \ldots \qquad \text{et} \qquad 1 - e^{i\theta} = \ldots$$
3. Rappeler la définition **et** l'expression des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité (où $n \geqslant 1$).
4. Rappeler précisément la formule du binôme de Newton.
5. Développer $(a - b)^5$.
6. Soit Q un polynôme du second degré de la forme $Q(X) = aX^2 + bX + c$: que valent la somme s et le produit p des deux racines de ce polynôme ?
7. Pour chacune des applications suivantes, préciser si elle est injective, surjective, bijective. Dans le cas où elle est bijective, donner une expression de la réciproque.
   (a) $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array} \right.$.
   (b) $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & g(x) = x^2 \end{array} \right.$.
   (c) $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & h(x) = x^2 \end{array} \right.$.
   (d) $k : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^- & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & k(x) = x^2 \end{array} \right.$.
   (e) $m : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & m(z) = z^2 \end{array} \right.$.

Exercice 2

1. Déterminer les racines carrées de $-3 - 4i$.
2. On considère le polynôme P défini par $P(z) = z^3 - z^2 + (-3 + i)z + 6 + 2i$.
   Montrer que ce polynôme P possède une racine réelle, et déterminer celle-ci.
3. Déterminer alors toutes les racines de P.

Exercice 3 On définit $u = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{7}\right) = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, et on pose
$$S = u + u^2 + u^4 \quad \text{et} \quad T = u^3 + u^5 + u^6.$$

1. (a) Que vaut u^7 ? Comparer $\overline{u}$ et $\dfrac{1}{u}$.
   (b) En déduire que les complexes S et T sont conjugués.
   (c) Justifier correctement, sans évaluation numérique, que la partie imaginaire de S est positive.
2. (a) Simplifier la somme $S + T$.
   (b) Développer et simplifier au maximum le produit $S \times T$.
   (c) En déduire la valeur de S et celle de T.
3. (a) Montrer :
$$\sum_{k=1}^{6} (-u^2)^k = -i \tan\left(\frac{2\pi}{7}\right).$$
   (b) Justifier :
$$2(u^2 - u^5) = 4i \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right).$$
   (c) En déduire :
$$4 \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \tan\left(\frac{2\pi}{7}\right) = \sqrt{7}.$$

Exercice 4 Pour $p \in \mathbb{N}$, on définit $a_p = \sqrt{p} + i$ et $Z_p = \dfrac{a_p}{\overline{a_p}} = \dfrac{\sqrt{p}+i}{\sqrt{p}-i}$.

1. <u>Dans cette question, on considère le cas $p = 3$.</u>
   (a) Donner la forme trigonométrique de a_3.
   (b) Préciser les racines $6^{ièmes}$ de 1 et vérifier que Z_3 en est une.
2. <u>Dans cette question on suppose que $p = 4$.</u>
   Le but de cette question est de prouver que $Z_4 = \dfrac{2+i}{2-i}$ n'est, pour aucun entier $n \in \mathbb{N}^*$, une racine $n^{\text{ième}}$ de 1.
   On va raisonner par l'absurde : on suppose donc qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(Z_4)^n = 1$.
   (a) Est-il possible que $n = 1$?
   (b) On suppose désormais $n \geqslant 2$, et on définit la somme
$$S = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (2-i)^k \, (2i)^{n-k}.$$
   Simplifier S à l'aide de la formule du binôme.
   (c) En revenant à l'expression initiale de S sous forme de somme, prouver l'existence de $(A, B) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $S = (2-i) \times (A + iB)$.
   (d) Conclure

Exercice 5

1. Résultats préliminaires
   (a) Rappeler ce qu'est l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$.
   (b) **Montrer** que, pour tout $(z, u) \in \mathbb{C}^2$, on a : $|z+u| \geqslant |z| - |u|$.
   (c) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$ et $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. Montrer :
   $$a > b \Longrightarrow |z^a| > \left|z^b\right|.$$

Soit n un entier non nul, et soit $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ une suite croissante de réels positifs avec $a_n \neq 0$:
$$0 \leqslant a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n \qquad \text{avec } a_n \neq 0.$$
On considère l'équation
$$(E) \quad : \quad a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0.$$
On se propose de démontrer que les solutions complexes de (E) ont toutes un module inférieur ou égal à 1.
On définit, pour tout $z \in \mathbb{C}$:
$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad \text{et} \qquad A(z) = -a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_{k-1} - a_k) z^k.$$

2. Montrer, pour tout $z \in \mathbb{C}$:
$$|A(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) |z|^k + a_0.$$
3. En déduire que, pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$, on a :
$$|A(z)| \leqslant a_n |z|^n.$$
4. En développant $(z-1) P(z)$, montrer :
$$|(z-1) P(z)| \geqslant a_n \left|z^{n+1}\right| - |A(z)|.$$
5. Déduire de ce qui précède que si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $|z| > 1$ alors
$$|(z-1) P(z)| \geqslant a_n |z|^n (|z| - 1).$$
6. Conclure.