La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 COURS et APPLICATIONS DU COURS - Questions largement indépendantes

1. Recopier, et compléter (pas de preuve exigée) :

   (a) $\forall x \in \ldots\ldots$, $\text{Arctan}'(x) = \ldots\ldots.$

   (b) $\forall x \in \ldots\ldots$, $\text{Arccos}'(x) = \ldots\ldots.$

   (c) $\forall x \in \ldots\ldots$, $\text{Arcsin}'(x) = \ldots\ldots.$

   (d) $\forall x \in \ldots\ldots$, $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ldots\ldots.$

   (e) $\forall x \in \ldots\ldots$, $\text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \ldots\ldots.$

   (f) Sous réserve d'existence : exprimer en fonction de $\tan(a)$ et de $\tan(b)$,
   $$\tan(a+b) = \ldots\ldots \qquad \text{et} \qquad \tan(2a) = \ldots\ldots$$

2. Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
$$\text{Arctan}(2x) + \text{Arctan}(3x) = \frac{\pi}{4}.$$

3. On pose $A = 2\text{Arccos}\left(\dfrac{1}{3}\right)$ et $B = \text{Arcsin}\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{9}\right)$.
   Calculer $\sin(A)$ et $\sin(B)$, puis comparer A et B.

Exercice 2 On définit la famille de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{R}}$ par, pour tout $k \in \mathbb{R}$,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \ln(1+x^2) + k\,\text{Arctan}(x).$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal.

Les trois questions sont largement indépendantes.

1. Déterminer le nombre de courbes $\mathcal{C}_k$ (avec $k \in \mathbb{R}$) qui passent par un point M_0 du plan de coordonnées (x_0, y_0).

2. (a) Pour $k \in \mathbb{R}$, donner l'équation de la tangente T_k à $\mathcal{C}_k$ au point d'abscisse 1.

   (b) Montrer que toutes les droites T_k sont concourantes en un point que l'on déterminera.

3. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on définit l'intégrale $I(k) = \displaystyle\int_0^1 f_k(t)\mathrm{d}t$.
   Existe t-il $k \in \mathbb{R}$ tel que $I(k) = \dfrac{\pi}{2}$? Si oui, donner la (les) valeur(s) exacte(s) de(s) k solution(s).

Exercice 3 On considère les deux fonctions f et g définies par

$$f(x) = \frac{1}{2}\text{Arctan}(\text{sh}(x)) \quad \text{et} \quad g(x) = \text{Arctan}\left(\frac{\text{sh}(x)}{1+\text{ch}(x)}\right).$$

1. Question de cours : rappeler puis prouver, la relation liant, pour tout réel x, $\text{ch}^2(x)$ et $\text{sh}^2(x)$.
2. Préciser et justifier le domaine de définition de f et de g.
3. Préciser les points où f est dérivable et donner une expression simplifier de f' (l'expression obtenue ne fera intervenir que la fonction ch).
4. Faire de même avec la fonction g. On détaillera bien le calcul efffectué.
5. En déduire que $f = g$ sur un intervalle à préciser.
6. Deux applications de l'égalité entre f et g.
   (a) Donner une expression simple de $\text{ch}\left(\frac{1}{2}\ln 3\right)$ et de $\text{sh}\left(\frac{1}{2}\ln 3\right)$.
   (b) En écrivant $f\left(\frac{1}{2}\ln 3\right) = g\left(\frac{1}{2}\ln 3\right)$, quelle tangente de quel «angle» peut-on en déduire ?
   (c) Résoudre l'équation : $\text{sh}(x_0) = 1$.
   Puis, en comparant $f(x_0)$ et $g(x_0)$, en déduire la tangente d'un autre «angle».

Exercice 4 On note $\mathcal{L}$ et $\mathcal{E}$ les courbes d'équations respectives «$y = \ln(x)$» et «$y = \exp(x)$» (dans un repère orthonormal).

1. (a) Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{L}$ en un point d'abscisse $a > 0$ et une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{E}$ en un point d'abscisse $b \in \mathbb{R}$.
   (b) Démontrer qu'il existe une droite $\mathcal{D}$ tangente commune à la courbe $\mathcal{L}$ en un point d'abscisse $a > 0$ et à la courbe $\mathcal{E}$ en un point d'abscisse $b \in \mathbb{R}$ si et seulement si
   $$\begin{cases} b + \ln(a) & = 0 \\ a\ln(a) - \ln(a) - a - 1 & = 0 \end{cases}$$
2. On définit la fonction φ sur $]0, +\infty[$ par :
   $$\varphi(t) = t\ln(t) - \ln(t) - t - 1.$$
   (a) Etudier les variations de φ sur l'intervalle $]0, 1[$.
   (b) En déduire l'existence et l'unicité d'un réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$.
   (c) Déterminer une relation simple entre $\varphi(x)$ et $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout $x > 0$.
   (d) En déduire le nombre de solutions $x \in]0, +\infty[$ à l'équation «$\varphi(x) = 0$».
3. Existe-t-il une tangente commune aux courbes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{E}$?
   Si oui, combien y en a-t-il ? Illustrer la situation à l'aide d'un schéma.

Exercice 5 On se propose de chercher pour quels réels x l'égalité suivante est vérifiée :

$$\text{Arcsin}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \text{Arccos}(x). \quad (E).$$

1. Première méthode

   On pose :

   $$f(x) = \text{Arcsin}\left(\sqrt{1-x^2}\right) - \text{Arccos}(x).$$

   (a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

   (b) Sur quel ensemble Δ_f la fonction f est-elle dérivable ?

   Calculer et simplifier $f'(x)$ pour $x \in \Delta_f$.

   (c) En déduire une expression simple de $f(x)$ pour chaque $x \in D_f$, et représenter l'allure de la courbe représentative de f sur D_f.

   (d) Conclure.

2. Deuxième méthode

   (a) Justifier que, pour tout $x \in D_f$, il existe un et un seul $\theta \in [0, \pi]$ tel que $x = \cos(\theta)$.

   (b) Compléter (en le justifiant) :

   - pour tout $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\text{Arcsin}\left(\sin(t)\right) = \ldots$.
   - pour tout $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\text{Arcsin}\left(\sin(t)\right) = \ldots$.
   - pour tout $t \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$, $\text{Arcsin}\left(\sin(t)\right) = \ldots$.
   - pour tout $t \in [0, \pi]$, $\text{Arccos}\left(\cos(t)\right) = \ldots$.
   - pour tout $t \in [-\pi, 0]$, $\text{Arccos}\left(\cos(t)\right) = \ldots$.
   - pour tout $t \in [\pi, 2\pi]$, $\text{Arccos}\left(\cos(t)\right) = \ldots$.

   (c) Simplifier au maximum $f(x) = f\left(\cos(\theta)\right)$ en fonction de θ.

   (d) Conclure.

3. Troisième méthode

   On pose

   $$\alpha = \text{Arcsin}\left(\sqrt{1-x^2}\right) \quad \text{et} \quad \beta = \text{Arccos}(x).$$

   (a) Comparer $\sin(\alpha)$ et $\sin(\beta)$.

   (b) Conclure.

Exercice 6

Soit un réel $a > 0$: on définit la fonction

$$f : x \mapsto f(x) = a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right),$$

de courbe représentative Γ, et $\mathcal{C}$, le cercle d'équation

$$«x^2 + y^2 = a^2»$$

dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan .

Soit M un point quelconque de Γ, et P son projeté orthogonal sur l'axe des ordonnées (Oy).

Montrer [1] que la tangente en M à Γ est parallèle à l'une des deux tangentes au cercle $\mathcal{C}$ et passant par P.

Application : la courbe représentative de $y = \mathrm{ch}(x)$ étant donnée, indiquer une méthode de construction géométrique (avec règle non graduée et compas) de la tangente en un point quelconque de cette courbe.

1. On rappelle qu'une tangente à un cercle est une droite dont l'intersection avec ce cercle est réduite à un seul point.