La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 APPLICATIONS DU COURS (questions plus ou moins indépendantes) : *dans cet exercice de vérification des techniques de calculs, il n'est pas demandé de justifier l'existence des intégrales et des développements limités.*

1. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^2 x \ln(1+x)\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties.
2. Calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^4 \ln(1+\sqrt{x}\,)\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{x}$.
3. Pour tout paramètre $k \in \mathbb{R}$, on définit la fonction f_k par
$$f_k(x) = \ln(1+x) + \frac{k}{1+x}.$$
On désigne par $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.
   (a) Déterminer le développement limité d'ordre 3, en $x=0$ de $f_k(x)$.
   (b) Donner l'équation de la tangente T_k à $\mathcal{C}_k$ en $x=0$.
   Montrer que toutes les tangentes T_k sont concourantes (avec $k \in \mathbb{R}$).
   (c) Existe-t-il des courbes $\mathcal{C}_k$ qui possèdent une tangente horizontale en $x=0$? Si oui, tracer l'allure locale de ces courbes et de leur tangente en 0.
   (d) Existe-t-il des courbes $\mathcal{C}_k$ qui possèdent un point d'inflexion en $x=0$? Si oui, tracer l'allure locale de ces courbes et de leur tangente en 0.
4. On pose $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x) - e^x}{x}$, fonction définie sur $\mathbb{R}^*$.
Prouver que f est prolongeable par continuité en $x=0$, puis, ainsi prolongée, que f est dérivable en $x=0$. Tracer l'allure du graphe de f au voisinage de 0.
5. Donner les fonctions solutions à valeurs réelles $y : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y(x) \end{array} \right.$ de chacune des équations différentielles suivantes :
   (a) (E_1) «$y''(x) + 4y'(x) + 8y(x) = 4$».
   (b) (E_2) «$y''(x) + y'(x) + \dfrac{1}{4}y(x) = \cos(x)$».
   (c) (E_3) «$y''(x) + y'(x) - 6y(x) = e^{2x}$».

Exercice 2 On désire résoudre l'équation différentielle suivante :
$$x^2y'' + 3xy' + y = \ln(x) \ (E).$$
C'est une équation différentielle linéaire, du second ordre, qui n'est pas à coefficients constants.
On en cherche les solutions à valeurs réelles, et définies sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

1. Montrer que l'équation homogène associée
$$x^2y'' + 3xy' + y = 0 \quad (EH)$$
possède une solution y_0 sous la forme $y_0(x) = x^\alpha$ (pour tout $x \in]0, +\infty[$), où α désigne une **constante** que l'on déterminera.

2. On cherche *la* solution générale f de (E) sous la forme :
$$\forall x \in I =]0,+\infty[,\ f(x) = C(x)x^{\alpha}$$
où C désigne une fonction deux fois dérivable sur I.
   (a) Montrer que f est solution de (E) si, et seulement si la fonction C' est solution (sur I) d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (F).
   (b) Résoudre cette équation différentielle (F) sur I.
3. Déterminer toutes les solutions de (E) sur I.
4. Dans cette question, on désire retrouver les solutions de l'équation différentielle (E) à l'aide d'une autre méthode (*changement de variable*).
Si y est une fonction deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$, on définit la fonction z sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in]0,+\infty[,\ y(x) = z(\ln x) \quad \text{autrement dit} \quad \forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = y(e^t).$$
   (a) Montrer que y est solution de (E) sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, notée (G).
   (b) Résoudre cette équation différentielle (G) sur $\mathbb{R}$.
   (c) Conclure.

Exercice 3 On considère, sur $I =]0,+\infty[$, l'équation différentielle
$$(E) : « \ y'(x) + \frac{x-1}{x^2}y(x) = 4e^{-\frac{1}{x}} \ ».$$

1. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E) sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$.
2. Déterminer la solution de (E) vérifiant la condition $y(1) = \dfrac{3}{e}$. On note f cette solution.
3. (a) Donner le développement limité d'ordre 2 lorsque $h \to 0$ de $(2+h^2)e^{-h}$.
   (b) Montrer que $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f possède, au voisinage de $+\infty$, une droite asymptote D, dont on précisera une équation et la position relativement à $\mathcal{C}_f$.
4. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 4 Dans cet exercice, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **continue** et l'équation différentielle
$$(E) \qquad « \ y'' - y = f(x) \ ».$$
On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E).

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation
$$(EH) \qquad « \ y'' - y = 0 \ ».$$
2. On définit les fonctions C et S par, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$C(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{ch}(t)\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad S(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{sh}(t)\mathrm{d}t.$$
Justifier que ces deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et calculer $C'(x)$ et $S'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Soit g, fonction définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \mathrm{sh}(x)C(x) - \mathrm{ch}(x)S(x).$$
Montrer que g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
Préciser alors l'ensemble $\mathcal{S}$.

4. <u>Une application</u> : déterminer les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle
$$\text{« } y''(x) - y(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} \text{ ».}$$

5. On suppose désormais que f est une *fonction périodique* de période $T > 0$.
On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = g(x+T) - g(x)$.
   (a) Montrer que φ est une solution de l'équation (EH).
   (b) En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, une expression de $\varphi(x) = g(x+T) - g(x)$ ne faisant intervenir que les quantités $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, $g(T)$ et $g'(T)$.
   (c) <u>Résultat intermédiaire</u> : soit λ, μ deux réels tels que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \mathrm{ch}(x) + \mu \mathrm{sh}(x) = 0.$$
   Montrer que $\lambda = \mu = 0$.
   (d) En déduire qu'il existe une et une seule solution de (E) qui soit périodique de période T.

Exercice 5 Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux fonctions continues, et l'équation différentielle
$$(E) : \text{« } y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \text{ ».}$$
On cherche les équations différentielles (E) vérifiant la propriété $(\mathcal{P})$ suivante :
$$(\mathcal{P}) \quad \text{«si } y \text{ est solution de } (E)\text{, alors } y^2 \text{ est aussi solution de } (E)\text{».}$$

1. On suppose dans cette question que l'équation (E) vérifie la propriété $(\mathcal{P})$ et qu'elle n'est pas homogène i.e b n'est pas la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
   (a) Soit y une solution de (E) : montrer que, si y s'annule sur $\mathbb{R}$, alors y est la fonction constante nulle sur $\mathbb{R}$.
   (b) Conséquence ?
2. Donner toutes les équations (E) vérifiant la propriété $(\mathcal{P})$.