La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 Décrire, en fonction des valeurs du paramètre réel m, l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ mx + y + mz = 1 \\ x + my + (m-1)z = m+1 \end{cases}.$$

Exercice 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $M = A + I_3 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

On souhaite calculer M^n par différentes méthodes.

1. Méthode 1

   (a) Exprimer A^2 en fonction de A.

   (b) A l'aide de la formule du binôme, calculer M^n.

2. Méthode 2

   (a) Calculer M^2 et déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $M^2 = \alpha M + \beta I_3$.

   (b) Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = u_n M + v_n I_3.$$
   Préciser u_0, v_0, u_1, v_1 et les relations entre u_{n+1}, v_{n+1}, u_n et v_n.

   (c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la même relation de récurrence d'ordre 2.

   (d) Déterminer u_n et v_n en fonction de n.

   (e) Exprimer alors M^n en fonction de n et comparer avec le résultat de la question **(1b)**.

3. Méthode 3

   Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer D diagonale telle que $MP = PD$.

   (b) Justifier que P est inversible et calculer P^{-1}.

   (c) Calculer D^n puis exprimer M^n à l'aide de P, D^n et P^{-1} (on ne demande pas le calcul de M^n).

4. Méthode 4

   (a) Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
   $$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ M^n = \begin{pmatrix} 5+4a_n & -4-4a_n & -1-a_n \\ a_n+1 & -a_n & -1-a_n \\ 0 & 0 & 3a_n+4 \end{pmatrix}.$$
   Préciser la valeur de a_0 et exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.

   (b) En déduire a_n en fonction de n.

   (c) Comparer avec le résultat de la question **(1b)**.

Exercice 3 Soit $\mathcal{E}$, l'ensemble des matrices de la forme

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Autrement dit : $\mathcal{E} = \left\{ M(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. (a) L'ensemble $\mathcal{E}$ est-il stable par addition ?
   (b) Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ est stable par le produit matriciel.
   Justifier que I_3 appartient à $\mathcal{E}$ et que toutes les matrices de $\mathcal{E}$ commutent entre elles.
   (c) Si une matrice $M(a,b)$ appartient à $\mathcal{E}$: est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse et montrer que son inverse est aussi dans $\mathcal{E}$.

2. Pour toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit, pour tout réel x, les matrices $\widehat{M}(x)$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \widehat{M}(x) = M\left(x, f(x)\right).$$
   On cherche les fonctions f solutions du problème suivant :
   « f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\widehat{M}(x)\widehat{M}(y) = \widehat{M}(x+y)$ » $(*)$.
   (a) Montrer que, si f est une solution du problème $(*)$, alors f vérifie une équation fonctionnelle de la forme
   « pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = \alpha f(x) + \beta f(y) + \varphi(x,y)$»
   où α, β sont des constantes à déterminer, ainsi que $\varphi(x,y)$, une quantité qui dépend (simplement) de x et y.
   (b) Montrer que, si f est une solution du problème $(*)$, alors
   - $f(0) = 0$
   - $\widehat{M}(0) = I_3$
   - pour tout réel x, $\widehat{M}(x)$ est inversible et $\widehat{M}^{-1}(x) = \widehat{M}(-x)$.
   (c) Montrer que, si f est une solution du problème $(*)$, alors sa dérivée f' est une fonction affine.
   (d) Déterminer exactement toutes les solutions du problème $(*)$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & a & \frac{a^2}{2} \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de P^n.
   Cette expression est-elle encore valable avec $n = -1$?