La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront <u>encadrés</u> ou soulignés.

Exercice 1

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{(n+1)\,2^n}.$$

1. Montrer que les deux suites sont adjacentes.
2. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite notée ℓ et que $\dfrac{5}{8} \leqslant \ell \leqslant \dfrac{3}{4}$.
3. Comment choisir n pour que u_n et v_n soient des valeurs approchées de ℓ à 10^{-3} près ?
4. On définit pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$.
   - (a) Exprimer u_n à l'aide de f.
   - (b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et simplifier $f'(x)$.
   - (c) En déduire : $u_n = \ln(2) - \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x$.
   - (d) Montrer : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)$.

Exercice 2

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

1. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation « $f_n(x) = 0$ » possède une et une seule solution dans l'intervalle $[0, +\infty[$.
   On notera u_n cette unique racine.
2. Calculer u_1 et u_2.
3. Vérifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n \in]0, 1[$.
4. (a) Préciser le signe, pour tout réel $x \in]0, 1[$, de la quantité $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
   - (b) En déduire, pour tout $n \geqslant 1$, le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
   - (c) Montrer que cette suite $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. On note L sa limite.
5. (a) Justifier proprement que la limite de $(u_n)^n$, lorsque n tend vers $+\infty$, est nulle.
   - (b) Donner enfin la valeur de L.
6. On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$:
   $$v_n = L - u_n \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$
   - (a) Prouver que, pour tout $n \geqslant 1$: $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{6}(u_n)^n$.
   - (b) Montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

Exercice 3

On note $\mathcal{E}$, l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\text{« pour tout } n \geqslant 0, \quad u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} + u_n \text{ ».}$$

Autrement dit :

$$\mathcal{E} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} + u_n\}.$$

1. Soit la suite $a = (a_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathcal{E}$ définie par $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$.
   (a) Calculer les termes a_2, a_3, a_4 (pour vérification : $a_5 = 30$).
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est un entier naturel.
   (c) Etudier la monotonie de la suite $a = (a_n)_{n\geqslant 0}$, puis montrer qu'elle diverge vers $+\infty$.
2. Soit la suite $b = (b_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathcal{E}$ définie par $b_0 = 0$ et $b_1 = 1$.
   (a) Calculer les termes b_2, b_3, b_4 (pour vérification : $b_5 = 43$).
   (b) Etudier la convergence de la suite $b = (b_n)_{n\geqslant 0}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = a_{n+1}b_n - a_n b_{n+1}$.
   Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:
   $$w_n = (-1)^{n+1}.$$
4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit : $f_n = \dfrac{a_n}{b_n}$.
   (a) Exprimer $(f_{n+1} - f_n)$ en fonction de w_n, b_n et b_{n+1}.
   (b) Montrer[1] que les suites $(f_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(f_{2n-1})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.
   (c) Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente : on notera L sa limite.
   A l'aide des valeurs calculées au début de cet exercice, donner un encadrement le plus précis possible de L par des nombres rationnels explicites.
5. (a) Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $0 < |f_n - L| \leqslant \dfrac{1}{b_n^2}$.
   (b) Montrer que L est un nombre irrationnel. On pourra raisonner par l'absurde.
6. On suppose que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de l'ensemble $\mathcal{E}$.
   (a) Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que :
   $$u_0 = \alpha a_0 + \beta b_0 \quad \text{et} \quad u_1 = \alpha a_1 + \beta b_1.$$
   (b) Montrer : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha a_n + \beta b_n$.
   (c) Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente <u>si et seulement si</u> $\alpha L + \beta = 0$.

1. Penser à utiliser *astucieusement* le résultat de la question précédente...

Exercice 4 Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.
On suppose qu'il existe deux réels positifs, α et β tels que $\alpha+\beta<1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+3} \leqslant \alpha x_{n+2} + \beta x_n.$$

On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \max(x_n, x_{n+1}, x_{n+2})$.

1. Montrer, pour tout $n \geqslant 0$, $x_{n+3} \leqslant (\alpha+\beta)\, u_n$ puis déterminer la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Montrer, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+3} \leqslant (\alpha+\beta)\, u_n$.
4. (a) Rappeler la **définition** de la partie entière d'un réel x.

   (b) Rappeler la **caractérisation** de $p = \lfloor x \rfloor$ si $x \in \mathbb{R}$.

   (c) **Prouver** : si $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$, alors $\lfloor x+k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.
5. Déduire, des questions précédentes : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leqslant u_n \leqslant (\alpha+\beta)^{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor} \max(u_0, u_1, u_2).$$
6. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Et celle de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?