La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$.
   (a) Montrer qu'il est possible de prolonger f par continuité en 0.
   On continuera à appeler f cette fonction ainsi prolongée sur $\mathbb{R}$.
   (b) La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? De classe C^1 sur $\mathbb{R}$?
   (c) Question de cours : rappeler l'énoncé (complet, hypothèses comprises) du théorème [1] des accroissements finis.
   (d) Montrer, pour tout $x > 0$:
   $$1 < f(x) < e^x.$$
   En déduire un encadrement de $f(x)$ du même type pour $x < 0$.
2. Dans cette question, n désigne un entier naturel ($n \in \mathbb{N}$).
   (a) Question de cours : rappeler l'énoncé (complet, hypothèses comprises) du théorème établissant la formule de Leibniz.
   (b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$: on définit les fonctions f_α et g sur $\mathbb{R}$ par
   $$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f_\alpha(x) = x^2 e^{\alpha x} \text{ et } g(x) = e^x.$$
   A l'aide de la formule de Leibniz, calculer $f_\alpha^{(n)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (c) En remarquant $f_2(x) = f_1(x)g(x)$ et en appliquant la formule de Leibniz, calculer $f_2^{(n)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (d) En déduire les valeurs des sommes :
   $$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}.$$

Exercice 2

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2}\arctan(x)$.

1. Etude de f : déterminer son tableau de variations, justifier correctement les valeurs des limites aux bords et tracer l'allure de sa courbe représentative.
2. Prouver que f est une fonction contractante sur $\mathbb{R}$, i.e C-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ pour une constante $C \in]0,1[$ que l'on précisera.
3. Justifier que f possède un, et un seul point fixe [2] dans $\mathbb{R}$: on le notera α.
   Vérifier : $\alpha \in [0,1]$.
4. Soit la suite u définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{2}\arctan(u_n)$.
   Montrer que la suite u converge, et préciser la valeur de sa limite.
5. A partir de quel rang est-on assuré que u_n est une valeur approchée de α à 10^{-3} près ?

1. Également appelé «égalité des accroissements finis».
2. On rappelle que x_0 est un point fixe de f si $f(x_0) = x_0$.

Exercice 3

On note $\mathcal{E}$, l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, **continues** vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y)) \qquad (*).$$

1. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de réels définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 1 \quad : \quad u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 2u_1 \end{cases}$.
   (a) Soit un entier naturel $n \geqslant 2$. Exprimer, simplement, en fonction de u_1 et de n :
   $$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}).$$
   (b) Toujours avec $n \geqslant 2$, développer et simplifier autrement, à l'aide de télescopages :
   $$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}).$$
   (c) Pour $n \geqslant 2$, calculer la somme $C_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} (2k-1)$.
   (d) En déduire, pour tout entier $n \geqslant 0$, une expression de u_n en fonction de n et u_1.
2. Soit f, un élément de $\mathcal{E}$, et x un réel.
   (a) Que vaut $f(0)$? Etudier la parité de f.
   (b) Montrer, à l'aide de la question **(1)** :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ f(nx) = n^2 f(x).$$
   (c) Montrer :
   $$\forall n \in \mathbb{Z},\ f(nx) = n^2 f(x).$$
   (d) Montrer :
   $$\forall r \in \mathbb{Q},\ f(rx) = r^2 f(x).$$
   (e) Montrer :
   $$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ f(\alpha x) = \alpha^2 f(x).$$
   (f) En déduire l'existence d'un réel λ tel que :
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \lambda t^2.$$
3. Décrire l'ensemble $\mathcal{E}$.
4. Complément : montrer que, si on cherche les fonctions **deux fois dérivables** sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $(*)$, on trouve dans ce cas beaucoup plus rapidement le même ensemble de solutions.

Exercice 4

Soit n, un entier naturel non nul. On pose pour $k \in \mathbb{N}^*$: $H_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$.

1. (a) Exprimer $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{i}$ à l'aide de H_n et de n.

   (b) Montrer également : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} H_k$.

2. Justifier l'égalité : $H_{n+1} = 1 + \left(\dfrac{H_n + H_{n-1} + \cdots + H_1}{n+1} \right)$.

3. Première application : on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma = \displaystyle\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{j-i}$.

   Justifier l'existence de σ, et l'exprimer uniquement en fonction de n et de H_n.

4. Seconde application :

   (a) Prouver, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
   $$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.$$

   (b) Montrer, pour tout entier $n \geqslant 1$:
   $$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1.$$
   En déduire l'équivalent : $H_n \sim \ln(n)$ lorsque $n \to +\infty$.

   (c) Etablir, pour tout entier $n \geqslant 1$:
   $$\frac{\ln(n!)}{n+1} + 1 + \frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant H_{n+1} \leqslant \frac{\ln(n!)}{n+1} + 2 - \frac{1}{n+1}.$$

   (d) Que vaut la limite $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\ln(n!)}{n+1} \right)$?

   (e) En déduire l'équivalent suivant, lorsque $n \to +\infty$: $\ln(n!) \sim n \ln(n)$.

Exercice 5 Soit un entier $n \geqslant 1$.

Montrer que, pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, on a l'égalité :
$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(z + e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)^n = n(z^n + 1) \ .$$

En déduire la formule :
$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n \left(\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right) = 0 \ .$$