

La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

PROBLEME

Le Père Noël doit distribuer n cadeaux deux à deux distincts à n enfants (avec $n \in \mathbb{N}^*$). En supposant que le Père Noël dépose les paquets au hasard, on souhaite étudier le nombre D_n de distributions qui font qu'aucun enfant n'obtienne son cadeau.

Modélisation possible : D_n correspond donc au nombre de bijections $f : [[1, n]] \rightarrow [[1, n]]$ sans point fixe, i.e le nombre de permutations sans point fixe (*dérangements*) de l'ensemble à n éléments $[[1, n]]$. On rappelle que, pour $k \in [[1, n]]$ et $f : [[1, n]] \rightarrow [[1, n]]$ bijection, k est un point fixe de f si $f(k) = k$. Par conséquent f est sans point fixe si, pour tout $k \in [[1, n]]$, $f(k) \neq k$.

I - Recherche d'une expression de D_n

1. Que valent D_1 ? D_2 ? D_3 ? Justifier. Tout schéma est le bienvenu.
2. A l'aide d'un raisonnement de dénombrement, prouver que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$D_{n+2} = (n+1)(D_{n+1} + D_n).$$

3. Que valent D_4 et D_5 ?

4. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $v_n = D_{n+1} - (n+1)D_n$.

Prouver que la suite $v = (v_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique. En déduire :

$$\forall n \geq 1, D_{n+1} = (n+1)D_n + (-1)^{n+1}.$$

5. Etablir, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

II - Une suite de polynômes associés et une autre façon de calculer les D_n

On pose, pour tout $x \in I =]-\infty, 1[$: $g(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$.

1. (a) Montrer que g est une solution de l'équation différentielle : « $(1-x)y' = xy$ ».
- (b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in I, \quad g^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)e^{-x}}{(1-x)^{n+1}}.$$

Au passage, on aura établi une relation du type

$$P_{n+1} = (a-X)P'_n + (X+b)P_n$$

où a et b sont des constantes (à déterminer) dépendant éventuellement de n .

Préciser les polynômes P_0 , P_1 et P_2 .

- (c) Montrer que P_n est de degré n et est unitaire (pour tout $n \in \mathbb{N}$).
- (d) La famille (P_0, P_1, \dots, P_n) est-elle libre dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$?
- (e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi_n = P_n(1)$: déterminer une relation entre φ_{n+1} et φ_n puis une expression simple de φ_n en fonction de n .
2. (a) En appliquant la formule de Leibniz à l'ordre n à une certaine égalité, justifier que, pour tout $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(1-x)g^{(n+1)}(x) - (x+n)g^{(n)}(x) - ng^{(n-1)}(x) = 0.$$

(b) En déduire une relation entre les polynômes P_{n+1} , P_n et P_{n-1} .

(c) En déduire, pour tout $n \geq 1$: $P'_n = nP_{n-1}$.

3. (a) Soit un nombre complexe $\alpha \neq 1$ et un entier $n \geq 1$. Justifier l'implication :

$$\begin{cases} P_n(\alpha) = 0 \\ P'_n(\alpha) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{n-1}(\alpha) = 0 \\ P'_{n-1}(\alpha) = 0 \end{cases}$$

(b) En déduire que toutes les racines de P_n sont simples (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).

4. On pose $\delta_n = g^{(n)}(0)$. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\delta_n = D_n.$$

Désormais, on pose, par convention : $D_0 = \delta_0$.

5. (a) Montrer, pour tout entier $k \in [[0, n]]$: $P_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} P_{n-k}$.

(b) Rappeler la formule de Taylor pour les polynômes.

(c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_{n-k} X^k.$$

(d) A l'aide de la question précédente, montrer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k = n!.$$

(e) Prouver que, pour tout $n \geq 2$, la somme des racines de P_n est nulle.

6. (a) Justifier que $g(x)$ admet un développement limité à tout ordre en $x = 0$.

(b) Calculer le développement limité de $g(x)$ à l'ordre 3 en $x = 0$.

Retrouver la valeur de D_3 .

7. Plus généralement, on désire retrouver l'expression de D_n en fonction de n .

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $A(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $B(X) = \sum_{k=0}^n b_k X^k$, deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$.

Donner directement l'expression du coefficient c_n du monôme de degré n du polynôme produit $C(X) = A(X)B(X)$ en fonction des a_k et b_k (avec $0 \leq k \leq n$).

(b) A l'aide d'un développement limité à l'ordre n en $x = 0$, retrouver une expression de D_n .

8. **Une dernière formule sur les polynômes P_n**

(a) A l'aide de la formule de Taylor, montrer que, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$Q(X+1) = \sum_{k=0}^n \frac{Q^{(k)}(X)}{k!}.$$

(b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P_n(X+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k.$$

Quel résultat déjà obtenu cette formule permet-elle de retrouver ?

III - Calcul d'une probabilité limite

On rappelle qu'on a établi, en partie I : pour tout $n \geq 1$, $\frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

1. Justifier que le nombre de façons différentes, pour le Père Noël, d'effectuer sa distribution (au hasard) est $n!$.

En supposant que toutes les tournées possibles sont équiprobables, la probabilité que le Père Noël se trompe en ne distribuant le bon cadeau à aucun des enfants est $p_n = \frac{D_n}{n!}$.

On désire étudier la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour $n \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = e^x \times \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-x)^k}{k!} \right)$.

2. Calculer et simplifier l'expression de $f'_n(x)$ (nombre dérivé de la fonction f_n au point x).
3. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$:

$$|f'_n(x)| \leq \frac{e}{n!}.$$

4. Prouver que, pour tout entier $n \geq 0$:

$$|f_n(1) - f_n(0)| \leq \frac{e}{n!}.$$

5. Conclure.

IV - Une application

N'aborder cette partie que si toutes les autres questions ont été traitées.

On considère n boules et n tiroirs numérotés de 1 à n . On place initialement chaque boule dans le tiroir portant son numéro. On sort les n boules que l'on replace aléatoirement dans les tiroirs, à raison d'une boule par tiroir. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules ayant retrouvé leur tiroir d'origine. On suppose toutes les répartitions équiprobables.

1. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, justifier que la probabilité que $X = k$ vaut $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{n}{k} D_{n-k}}{n!}$.

2. Montrer : pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

3. On rappelle que l'espérance de la variable aléatoire X est, par définition :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X = k).$$

Calculer l'espérance de X .