La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront <u>encadrés</u> ou $\boxed{\textit{soulignés}}$.

Exercice 1 Applications du cours - questions indépendantes.

1. Soit $E=\mathbb{R}^3$, $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+2y-z=0\}$ et $G=\mathrm{Vect}\,((1,-1,1))$.
   Donner une base de F, puis montrer que $E=F\oplus G$.
2. Soit $E=\mathbb{R}\,[X]$, $F=\left\{P\in E,\ \displaystyle\int_{-1}^{1}P\,(t)\,\mathrm{d}t=P\,(1)=0\right\}$ et $G=\mathrm{Vect}\,(1+X+X^2)$.
   Montrer que F et G sont en somme directe.
3. Soit $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, montrer que la famille de fonctions (f_1,f_2,f_3,f_4) où, pour tout $x\in\mathbb{R}$,
   $$f_1\,(x)=\sin\,(x),\quad f_2\,(x)=\cos\,(x),\quad f_3\,(x)=\sin\,(2x)\quad\text{et}\quad f_4\,(x)=e^{-x}$$
   est libre.
4. Soit $E=\mathbb{R}_2\,[X]$ et f définie sur E par $f\,(P\,(X))=2XP\,(X)-(X^2+1)\,P'\,(X)$.
   (a) Justifier que f est un endomorphisme de E.
   (b) Déterminer son noyau $\ker(f)$.
   (c) Donner une famille génératrice de son image $\mathrm{Im}(f)$.
   (d) $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont-ils supplémentaires dans E ?

Exercice 2 Soit f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3x-5y+9z\\x+3y-3z\\-x-y+3z\end{pmatrix}$.

1. Etude de f
   (a) Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im}\, f$. Préciser une base de chacun de ces sous espaces : ces bases seront constituées de vecteurs dont les 2$^{\text{ièmes}}$ et 3$^{\text{ièmes}}$ composantes valent 0 ou 1.
   (c) L'endomorphisme f est-il injectif ? surjectif ? bijectif ?
   (d) Montrer : $\mathbb{R}^3=\ker f\oplus\mathrm{Im}\, f$.
2. Deux projecteurs
   Soient p et q les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ définis par
   $$p\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x-3y+6z\\y\\-x-y+3z\end{pmatrix}\ \text{et}\ q\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x-2y+3z\\x+2y-3z\\0\end{pmatrix}.$$
   (a) Justifier que p et q sont des projecteurs. Sont-ils des projecteurs associés ?
   (b) Déterminer $\ker p$ et $\mathrm{Im}\, p$.
   (c) Retrouver alors directement l'égalité $\mathbb{R}^3=\ker f\oplus\mathrm{Im}\, f$.
3. Calcul de f^n
   (a) Déterminer α et β réels tels que $f=\alpha p+\beta q$.
   (b) Déterminer $p\circ q$ et $q\circ p$.
   (c) En déduire pour $n\in\mathbb{N}$, l'expression de f^n en fonction de p et q uniquement (et de n).

Exercice 3

ATTENTION : dans cet exercice, il est demandé de traiter la **partie I** puis, **au choix**, la **partie II** ou (**exclusivement**) la **partie III**. Il est inutile d'aborder ces deux parties II et III, seule la première rencontrée dans la copie sera corrigée.

I - Etude du cas général

E désigne ici **un** $\mathbb{R}$-espace vectoriel non trivial, mais quelconque, et f **un** endomorphisme de E ($f \in \mathcal{L}(E)$) vérifiant l'égalité :

$$f^2 - 4f + 3I = 0$$

où l'on a posé $\mathrm{I} = \mathrm{Id}_E$, application identité de E (rappel : ici, 0 représente l'application nulle $0_{\mathcal{L}(E)}$).

1. Montrer que f est un automorphisme de E et exhiber f^{-1}.
2. On note g et h les éléments de $\mathcal{L}(E)$ définie par $g = f - 3\mathrm{I}$ et $h = f - \mathrm{I}$.
   (a) Déterminer $g \circ h$ et $h \circ g$. En déduire[1] deux inclusions, que l'on prouvera, liant chacune deux ensembles parmi les quatre suivants : $\mathrm{Im}(g)$, $\mathrm{Im}(h)$, $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Ker}(h)$.
   (b) Montrer que I peut s'écrire comme combinaison linéaire de g et h.
   En déduire que $E = \mathrm{Im}(g) + \mathrm{Im}(h)$.
   (c) On pose $G = \mathrm{Ker}(g)$ et $H = \mathrm{Ker}(h)$.
   Prouver[2] que G et H sont des sous-espaces supplémentaires de E.
3. On note p le projecteur sur G parallèlement à H, et q le projecteur sur H parallèlement à G. Faire un schéma illustrant cette situation et faisant apparaître les espaces G, H, un vecteur $\vec{x}$ quelconque, $p(\vec{x})$ et $q(\vec{x})$.
   (a) Exprimer p et q à l'aide de g et h.
   (b) Montrer qu'on a $f = 3p + q$.
   (c) Déduire des résultats précédents l'expression de f^n en fonction uniquement de p et q (et de $n \geqslant 1$).
   (d) L'expression obtenue est-elle valable pour $n = -1$?

II - Un premier cas particulier

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$: si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on pose $f(X) = AX$.

1. Justifier que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifie $f^2 - 4f + 3\mathrm{I} = 0$.
2. Montrer qu'il existe deux projecteurs p et q de $E = \mathbb{R}^3$, que l'on explicitera, et des constantes réelles a et b vérifiant : $\forall n \geqslant 1,\ f^n = a^n p + b^n q$.
3. Trouver, à l'aide de la question précédente, l'expression analytique de f^n.
4. On définit trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$ et, pour tout $n \geqslant 0$,
   $\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & -u_n + 2v_n - 2w_n \\ v_{n+1} & = & -2u_n + 3v_n - 2w_n \\ w_{n+1} & = & 2u_n - 2v_n + 3w_n \end{array}\right.$ et on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer u_n, v_n et w_n en fonction de u_0, v_0 et w_0 (et de n).
   (b) A quelle condition sur X_0 les trois suites convergent-elles simultanément ?

1. On demande ici d'écrire ces deux inclusions et d'en démontrer une.
2. On n'oubliera pas que $G = \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{I})$ et $H = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{I})$, donc $\vec{x} \in G$ équivaut à $f(\vec{x}) =$..., et $\vec{x} \in H$ à $f(\vec{x}) =$...

III - Un second cas particulier

On considère maintenant l'application f définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par, pour tout $P = P(X) \in \mathbb{R}_2[X]$:

$$f(P(X)) = (X^2+1)P(1) + P(X) \quad \text{i.e} \quad f(P) = P(1)(X^2+1) + P.$$

1. Montrer que f est bien un **endo**morphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que $f^2 - 4f + 3I = 0$.
3. Justifier que f est un **auto**morphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et exprimer $f^{-1}(P(X))$ à l'aide de $P(1)$ et de $P(X)$.
4. Montrer qu'il existe deux projecteurs p et q de $E = \mathbb{R}_2[X]$, que l'on explicitera, et des constantes réelles a et b vérifiant : $\forall n \geqslant 1,\ f^n = a^n p + b^n q$.
5. Préciser $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Ker}(q)$ sous forme d'espaces vectoriels engendrés.
6. Donner l'expression de $f^n(1 + X + X^2)$.
7. Cette question est largement indépendante de ce qui précède.
   On note Δ, l'endomorphisme (dérivation) de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $\Delta(P) = P'$.
   Les endomorphismes f et Δ de $\mathbb{R}_2[X]$ commutent-ils ?
   On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ tels que $(\Delta \circ f)(P) = (f \circ \Delta)(P)$: justifier que $\mathcal{S}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}_2[X]$, et en déterminer une base.

Exercice 4

I - Etude d'un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^2$

On considère f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^2$ défini par

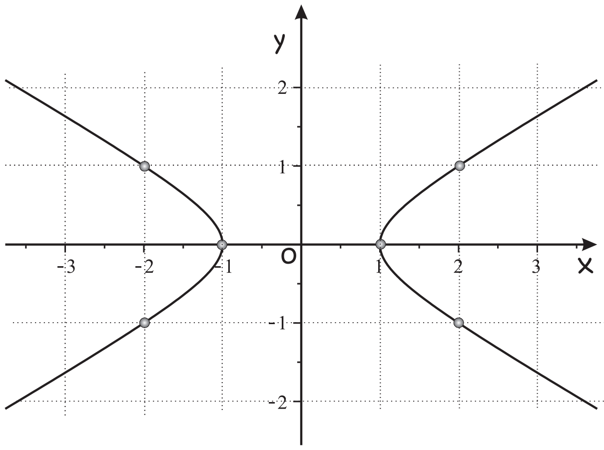
$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = (2x+3y, x+2y) \end{array} \right. .$$

On note $I = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$, l'application identité de $\mathbb{R}^2$.

1. (a) Soit (x', y') fixé dans $\mathbb{R}^2$: résoudre l'équation $f(x,y) = (x',y')$ d'inconnue (x,y).
   (b) Montrer que f est un automorphisme de E.
   On note h, l'automorphisme réciproque de f ($h = f^{-1}$). Donner l'expression de $h(x,y)$.
2. (a) Vérifier que $f^2 - 4f + I = 0$.
   (b) Montrer que cette égalité permet de retrouver le fait que f est un automorphisme de E et une expression de h en fonction de f et de I. Vérifier la cohérence des résultats obtenus avec ceux de la question **(1b)**.
3. (a) Montrer que l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$ possède deux racines réelles λ_1 et λ_2 telles que $\lambda_1 < \lambda_2$.
   (b) Montrer que l'ensemble $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1 I)$ est une droite vectorielle. On notera $\vec{v}_1$ le vecteur directeur de cette droite dont la seconde composante est -1 (i.e) $\vec{v}_1 = (x, -1)$: trouver x.
   De même, on prouverait (inutile de le faire) : $\mathrm{Ker}(f - \lambda_2 I) = \mathrm{vect}(\vec{v}_2)$ avec $\vec{v}_2 = (\sqrt{3}, +1)$.
   (c) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $f^n(\vec{v}_1) = \lambda_1^n \vec{v}_1$.
   De même, on prouverait $f^n(\vec{v}_2) = \lambda_2^n \vec{v}_2$ (inutile de le faire).
4. (a) Vérifier que le vecteur $(1,0)$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$: autrement dit, déterminer des réels α et β tels que $(1,0) = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$.
   (b) En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$, une expression de $f^n(1,0) = (a_n, b_n)$.
   (c) Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 1$, a_n et b_n sont des entiers naturels.

II - Intermède - Un peu de culture

Soit $\mathcal{C}$, la courbe d'équation $x^2 - 3y^2 = 1$: il s'agit donc de l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) (dans le plan muni d'un repère orthonormal). Cette courbe est une conique appelée «**hyperbole**» dont voici l'allure :



Le but de ce problème est de déterminer les points à **coordonnées entières** (donc dans $\mathbb{Z}^2$) situés sur la courbe $\mathcal{C}$. Les variables x et y apparaissant dans l'équation de $\mathcal{C}$ uniquement sous forme de carrés, il suffit de trouver les (x, y) avec x et y entiers naturels : en effet, si $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ est solution, les trois autres couples $(-x, y)$, $(x, -y)$ et $(-x, -y)$ sont également solutions, et un de ces quatre couples est à valeurs dans $\mathbb{N}^2$.

Conséquence : on cherche à résoudre l'équation $x^2 - 3y^2 = 1$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ (appelée *équation diophantienne*). .

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de cette équation : ainsi $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x^2 - 3y^2 = 1\}$. On classe les éléments de $\mathcal{S}$ par ordre d'abscisse croisssante : $\mathcal{S} = \{\vec{z}_0, \vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \ldots, \vec{z}_n, \ldots\}$ avec $\vec{z}_0 = (1, 0)$, $\vec{z}_k = (x_k, y_k)$ et $1 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots$.

III - Recherche des éléments de $\mathcal{S}$

1. Déterminer $\vec{z}_1$.
2. L'ensemble $\mathcal{S}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
3. On rappelle que la fonction f a été introduite à la première partie.
   (a) Vérifier $f(\vec{z}_0) = \vec{z}_1$.
   (b) Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ est stable par f (i.e) $f(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$.
4. L'objet de cette question est de prouver que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f(\vec{z}_n) = \vec{z}_{n+1}$.
   On raisonne par l'absurde : on suppose donc que l'ensemble $\mathcal{D} = \{k \in \mathbb{N} \mid \vec{z}_{k+1} \neq f(\vec{z}_k)\}$ est non vide.
   (a) Justifier l'existence de $i = \min(\mathcal{D})$, le plus petit élément de l'ensemble $\mathcal{D}$.
   Peut-on avoir $i = 0$?
   (b) On rappelle que h est la réciproque de la fonction f (voir la première partie).
   Déterminer $h(\vec{z}_{i+1})$ en fonction de x_{i+1} et y_{i+1}.
   (c) Montrer que $h(\vec{z}_{i+1})$ appartient à $\mathcal{S}$.
   On rappelle que les éléments de $\mathcal{S}$ sont des couples d'entiers positifs.
   (d) Prouver l'existence d'un entier $k \in \{1, 2, \ldots, i\}$ tel que $h(\vec{z}_{i+1}) = \vec{z}_k$.
   (e) Conclure.
5. Décrire $\mathcal{S}$. Cet ensemble est-il infini ? borné ?