La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t+x}\mathrm{d}t$, quantité qu'on ne cherchera pas à expliciter.

1. (a) Justifier que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Préciser son signe.

   (b) A l'aide d'un changement de variable affine, montrer que, pour tout réel $x > 0$:
   $$f(x) = e^{-x}\int_x^{x+1} \frac{e^u}{u}\mathrm{d}u.$$

   (c) On pose $F(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \frac{e^u}{u}\mathrm{d}u$.
   Montrer que cela définit une fonction F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et calculer sa dérivée F'.

   (d) Justifier que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et est solution d'une équation différentielle de la forme :
   $$\text{« } f'(x) + f(x) = \beta(x) \text{ »}$$
   où β est une fonction (du type fraction rationnelle) que l'on explicitera.

   (e) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $x > 0$:
   $$f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2}\mathrm{d}t + \beta(x).$$

   (f) En déduire une expression de $f'(x)$ sous la forme $\displaystyle\int_0^1 \alpha(x,t)\,\mathrm{d}t$ où $\alpha(x,t)$ est une fonction de x et de t.

   (g) Préciser la monotonie de la fonction f.
   La fonction f admet-elle des limites en 0^+ et en $+\infty$? (on ne demande pas, pour l'instant de calculer ces limites).

2. (a) Montrer que, pour tout $x > 0$:
   $$\frac{e-1}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{e-1}{x}.$$

   (b) En déduire un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Une preuve détaillée est attendue.

3. (a) Rappeler l'énoncé (hypothèses comprises) de l'**inégalité des accroissements finis**.

   (b) A l'aide de cet énoncé, déterminer un réel positif M tel que
   $$\text{pour tout } t \in [0,1],\ |e^t - 1| \leqslant Mt.$$

   (c) Soit g, la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t-1}{x+t}\mathrm{d}t$.
   Montrer que g est une fonction bornée sur $]0,+\infty[$.

   (d) Quelle relation simple existe-t-il entre $f(x)$ et $g(x)$?
   En déduire l'équivalent suivant :
   $$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x).$$

4. On se propose désormais de déterminer une valeur approchée de $f(1)$.
   On introduit la fonction h, définie sur $[0,1]$ par : $\forall t \in [0,1]$, $h(t) = \dfrac{e^t}{1+t}$.

(a) Etudier la monotonie de la fonction h sur l'intervalle $[0,1]$.

(b) On définit deux suites $u=(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $v=(v_n)_{n\geqslant 1}$ par, pour tout $n\geqslant 1$:
$$u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}h\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}h\left(\frac{k+1}{n}\right).$$
Donner une interprétation géométrique des réels u_n et v_n. Un schéma clair serait le bienvenu.

(c) Prouver : pour tout $k\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$,
$$\frac{1}{n}h\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}h(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{n}h\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

(d) Déduire, de ce qui précède : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,
$$\left|f(1)-\frac{u_n+v_n}{2}\right|\leqslant\frac{h(1)-h(0)}{2n}.$$

(e) Indiquer une méthode permettant d'obtenir une valeur approchée de $f(1)$ à 10^{-2} près.

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f. Indication : $f(1)\approx 1,12$.

Exercice 2

PARTIE PRÉLIMINAIRE

1. Question de cours : soit g et h, deux endomorphismes d'un espace vectoriel E. Compléter et démontrer l'équivalence suivante :
$$(g\circ h=0)\Leftrightarrow(\ldots\subset\ldots).$$

2. Soit l'application linéaire $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y)=(2x-4y,x-2y)\end{array}\right.$.

(a) Etudier f^2. Que peut-on en déduire concernant $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$?

(b) Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.

(c) Soit le vecteur $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.
Justifier que la famille $(\vec{a},f(\vec{a}))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et donner la matrice de f dans cette base. Quelle relation existe-t-il entre cette matrice et la matrice canoniquement associée à f ? On précisera en détail tous les éléments présents dans cette relation.

PARTIE A

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. On désigne l'application identité de E par Id, et l'application linéaire constante nulle sur E par $\tilde{0}$.

1. On considère, dans cette question, f, un endomorphisme de E vérifiant $f\neq\tilde{0}$ et $f^2=\tilde{0}$.

(a) Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{a}$ tel que la famille $(\vec{a},f(\vec{a}))$ soit une famille libre dans E.

(b) Montrer que cette famille $\mathcal{B}=(\vec{a},f(\vec{a}))$ est une base de E.

(c) Donner la matrice de l'endomorphisme f dans cette base.

2. On considère, dans cette question, f, un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = -\mathrm{Id}$.
   (a) Montrer que, pour tout réel λ (fixé), l'équation $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$, d'inconnue $\vec{x}$, n'admet qu'une seule solution (triviale....).
   (b) Soit $\vec{a}$, un vecteur non nul. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\vec{a}, f(\vec{a}))$ est une base de E.
   (c) Donner la matrice de l'endomorphisme f dans cette base $\mathcal{B}$.

PARTIE B

<u>*Remarque*</u> *: la question 1. de cette* ***partie B*** *est totalement indépendante de la* ***partie A****.*
Dans cette partie, E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 3. On désigne par f l'application qui, à tout polynôme P de E, associe $f(P)$ défini par :

$$f(P) = (1 + X^2)P'' - 2XP'$$

où, bien entendu, P' et P'' désignent les dérivées première et seconde de P.

1. (a) Montrer que f est un endomorphisme de E.
   (b) Donner la matrice A de f relativement à la base canonique $\mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3)$ de E. Que vaut le rang de la matrice A ?
   (c) Déterminer une base de l'image $\mathrm{Im}(f)$.
   (d) Déterminer une base du noyau de f. On notera $E_0 = \mathrm{Ker}(f)$.
   (e) On note E_{-2} l'ensemble des polynômes P de E vérifiant $f(P) = -2P$:
   $$E_{-2} = \{P \in E \mid f(P) = -2P\}.$$
   Montrer que E_{-2} est un sous-espace de E. Donner une base de E_{-2}.
   (f) En déduire l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f s'écrit :
   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
   (g) <u>Compléments</u> : comparer $\mathrm{Im}(f)$ et E_{-2}.
   Les sous-espaces $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont-ils supplémentaires dans E ?

2. On cherche les endomorphismes g de E tels que $g^2 = f$ (en quelque sorte, les «racines carrées» de l'endomorphisme f). On considère un endomorphisme g répondant au problème.
   (a) Montrer que f et g commutent.
   (b) Montrer que le sous-espace E_0 est stable par g, autrement dit : $\forall P \in E_0,\ g(P) \in E_0$.
   (c) On peut donc définir l'endomorphisme g_0 du sous-espace E_0 :
   $$g_0 : \left| \begin{array}{ccc} E_0 & \longrightarrow & E_0 \\ P & \longmapsto & g_0(P) = g(P) \end{array} \right. .$$

On dit que g_0 est l'*endomorphisme induit* par g sur le sous-espace E_0.
Justifier $g_0^2 = 0$. En déduire :
– soit $g_0 = 0$
– soit il existe une base de E_0 dans laquelle la matrice de g_0 est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) Justifier que g induit également un endomorphisme sur le sous-espace E_{-2} : on notera g_{-2} cet endomorphisme de E_{-2}.
Que vaut g_{-2}^2 ? A l'aide de la **partie A**, que peut-on en conclure ?

(e) En déduire la forme d'une matrice de g dans une base adaptée.

Exercice 3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

On note : $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $f(M) = AMB$. Montrer que f définit un endomorphisme de $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) On définit l'ensemble $H = \{M \in E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AMB = O_2\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de dimension 3 dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Préciser une base de H.

   (c) Quel est le rang de l'endomorphisme f ? Calculer $f(\mathrm{I}_2)$, et préciser une base de $\mathrm{Im}(f)$.

   (d) Montrer que $D = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2)$ et H sont des sous-espaces supplémentaires de E.

2. (a) Montrer que $P_1 = \{M \in E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = O_2\}$ et $P_2 = \{M \in E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid MB = O_2\}$ sont des plans vectoriels.

   (b) Quelles relations évidentes existe-t-il entre P_1, P_2 et H ?

   (c) Les sous-espaces P_1 et P_2 sont-ils supplémentaires dans H ? Dans E ?

   (d) Justifier $P_1 \neq P_1 + P_2$, et en déduire la dimension de $P_1 \cap P_2$.

3. On donne le sous-espace de E : $\Delta = \{M \in E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MB\}$.

   (a) Comparer Δ et $P_1 \cap P_2$.

   (b) Montrer que Δ est une droite vectorielle dont on précisera un vecteur directeur.

   (c) En déduire l'équivalence, pour tout $M \in E$: $(AM = MB) \Leftrightarrow (AM = MB = 0)$.