La calculatrice n'est pas autorisée. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 Soit $E=\mathbb{R}_2[X]$: on pose, pour tout $(P,Q)\in E^2$,
$$(P|Q):=P(1)Q(1)+\int_0^1 P'Q'=P(1)Q(1)+\int_0^1 P'(t)Q'(t)\mathrm{d}t.$$

1. Prouver, en détail, que ceci définit un produit scalaire sur E.
2. Cette question **(2.)** et la suivante **(3.)** sont largement indépendantes et peuvent donc être traitées séparément.
   (a) A l'aide du procédé de *Gram-Schmidt*, construire une base orthonormale $\mathcal{B}=(R_0,R_1,R_2)$ à partir de la base canonique $\mathcal{C}=(1,X,X^2)$.
   (b) On note f, le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}_1[X]$. Pour tout $P\in E$, donner l'expression de $f(P)$ à l'aide de P et de la base $\mathcal{B}=(R_0,R_1,R_2)$.
   (c) Déterminer $f(X^2)$. En déduire la distance de X^2 au sous-espace $\mathbb{R}_1[X]$.
3. Soit $G=\{P\in E \mid \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t=0\}$.
   (a) Déterminer une base et la dimension de ce sous-espace vectoriel de E.
   (b) Montrer que $G^\perp=\mathrm{vect}(X^2-3)$.
   (c) Justifier que, pour tout $P\in E$, $\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t=P(1)-\int_0^1 tP'(t)\mathrm{d}t$.
   (d) Exhiber alors un polynôme $A\in E$ tel que :
   $$\forall P\in E,\quad \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t=(A|P)$$
   et montrer que ce résultat permet de retrouver celui de la question (3b).

Exercice 2 Une puce se déplace à chaque unité de temps sur les quatre sommets, nommés A, B, C et D, d'un carré selon le protocole suivant :

- A l'instant 0, la puce se trouve sur le sommet A
- Si à l'instant $n\geqslant 0$ la puce se trouve sur le sommet A, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet A avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et sur le sommet C avec la probabilité $\frac{1}{3}$.
- Si à l'instant $n\geqslant 0$ la puce se trouve sur le sommet B, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet A avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le sommet C avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à l'instant $n\geqslant 0$ la puce se trouve sur le sommet C, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet B avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le sommet D avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à l'instant $n\geqslant 0$ la puce se trouve sur le sommet D, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet B avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et sur le sommet D avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

Pour tout entier naturel n, On note les événements

- $A_n=$ « la puce est sur le sommet A à l'instant n »
- $B_n=$ « la puce est sur le sommet B à l'instant n »
- $C_n=$ « la puce est sur le sommet C à l'instant n »
- $D_n=$ « la puce est sur le sommet D à l'instant n »

1. (a) Préciser les valeurs de $\mathbb{P}(A_0)$, $\mathbb{P}(B_0)$, $\mathbb{P}(C_0)$ et $\mathbb{P}(D_0)$. Justifier.
   (b) Rappeler l'énoncé de la formule des probabilités totales.
   (c) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :
   $$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \frac{2}{3}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_n).$$
   (d) Exprimer de même, pour tout entier $n \geqslant 0$, $\mathbb{P}(B_{n+1})$, $\mathbb{P}(C_{n+1})$ et $\mathbb{P}(D_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(A_n)$, $\mathbb{P}(B_n)$, $\mathbb{P}(C_n)$ et $\mathbb{P}(D_n)$.
   (e) Que vaut, pour tout n de $\mathbb{N}$, la somme $\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}(D_n)$?
2. On pose $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_n) \\ \mathbb{P}(B_n) \\ \mathbb{P}(C_n) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   On pose également :
   $$R = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad V = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$
   Quelle relation existe-t-il entre U_{n+1}, U_n, R et V ?
3. (a) Déterminer une matrice $L \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $L = RL + V$.
   (b) Etablir la relation suivante, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $U_n = R^n(U_0 - L) + L$.
4. On pose $M = 6R$ et on appelle f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice M. La base canonique de $\mathbb{R}^3$ sera notée $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, Id représente l'application identité de $\mathbb{R}^3$ et I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $Q_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_3)$.
   Montrer que Q est un polynôme de degré trois, possédant trois racines réelles, à déterminer, λ_1, λ_2 et λ_3 avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
   (b) Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, calculer le rang de la matrice $M - \lambda_k I_3$, puis montrer que le noyau $E_{\lambda_k} = \mathrm{Ker}(f - \lambda_k \mathrm{Id})$ est une droite vectorielle dont on précisera un vecteur directeur $\vec{b}_k$: on choisira $\vec{b}_k$ composé uniquement de valeurs entières avec sa première composante la plus petite possible à choisir dans $\{1, 3\}$.
   (c) Prouver que la famille $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et préciser la matrice Δ de f sur cette base $\mathcal{B}$.
   (d) Quelle relation existe t-il entre les matrices M et Δ ?
5. Indiquer une méthode de calcul de R^n (dont on ne demande pas une expression détaillée).
6. En déduire la limite de la colonne U_n (i.e de chacune des composantes de la colonne U_n) lorsque n tend vers $+\infty$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(D_n)$.
   Si l'on décide d'écraser cette puce, où vaut-il mieux frapper ?

PROBLEME Dans tout ce problème, h désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ par :

$$\boxed{h : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}}$$

Les quatre parties de ce problème sont plus ou moins indépendantes.

Partie 1 : cours (pas de preuve exigée)

1. Recopier et compléter :
$$\forall x \in \ldots\ldots, \quad \arctan'(x) = \ldots\ldots.$$
2. Soit n, un entier naturel. Rappeler l'expression des développements limités en $x = 0$ de
   (a) $\dfrac{1}{1+x}$ à l'ordre n.
   (b) $\arctan(x)$ à l'ordre $2n+1$.
3. Représenter le graphe de la fonction arctan (on fera apparaître clairement les valeurs des éventuelles limites).

Partie 2 : étude de h et quelques applications

1. Etudier la continuité de h sur $[0, +\infty[$.
2. (a) Justifier que h est dérivable sur $]0, +\infty[$.
   Vérifier que, pour tout $x > 0$, $h'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} f(x)$ où f désigne une fonction que l'on explicitera.
   (b) Etudier les variations de f sur $]0, +\infty[$.
   (c) Dresser alors le tableau de variation de h, limites aux bords comprises (et justifiées).
   (d) Montrer que h possède un développement limité d'ordre 2 en 0 (à droite) que l'on exhibera. Quelle conséquence graphique peut-on en tirer ?
   (e) Montrer que h est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et préciser la valeur de son nombre dérivée (à droite) en 0.
   (f) A l'aide des éléments précédents, donner l'allure de la courbe représentative de h sur $[0, +\infty[$.
3. (a) Justifier que h admet une fonction réciproque dont on précisera l'ensemble de définition. Tracer l'allure de la courbe représentative de cette réciproque h^{-1}.
   (b) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation
$$(E_n) \text{ « } n \arctan(\sqrt{x}) = \sqrt{x} \text{ »}$$
   possède, sur $]0, +\infty[$, une et une seule solution x que l'on notera u_n.
   Déterminer la limite de cette suite $u = (u_n)_{n \geqslant 1}$ ainsi construite, et en préciser un équivalent simple lorsque $n \to +\infty$.
4. Soit g, la fonction définie par : $g(x) = \displaystyle\int_1^x h(t)\mathrm{d}t$.
   (a) Préciser l'ensemble de définition de g, noté I.
   (b) Déterminer le signe de g sur I, et ses variations sur I.
   (c) Justifier que, pour tout $x \geqslant 1$: $g(x) \geqslant \dfrac{\pi}{2}(\sqrt{x} - 1)$.
   En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (g(x))$.
   (d) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer l'expression explicite de $g(x)$ en fonction de x.

Partie 3 : étude d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) :

$$\text{pour tout } x \in [0, +\infty[, \quad 2xy'(x) + y(x) = \frac{1}{1+x}.$$

L'objet de cette partie est l'étude des solutions y dérivables sur $[0, +\infty[$.

1. Résoudre, sur $]0, +\infty[$, l'équation homogène (EH) associée à (E).
2. (a) Etudier l'existence de primitives de la fonction $k : x \mapsto k(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$.
   A l'aide du changement de variable $t = \sqrt{x}$, déterminer l'expression d'une primitive de k.
   (b) Déduire de ces calculs une solution particulière de (E) sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que (E) possède une et une seule solution y qui soit dérivable sur $[0, +\infty[= \mathbb{R}^+$.

Partie 4 : étude des dérivées successives de h

Dans cette partie, n désigne un entier naturel et $h^{(n)}$ la fonction dérivée d'ordre n de h.

1. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $2xh'(x) + h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
2. Une expression de $h^{(n)}$
   (a) Déterminer le développement limité de h à l'ordre n en $x = 0$.
   (b) Prouver qu'il existe un polynôme P_n à coefficients réels et un réel λ_n (dépendants de n) tels que :
   $$(*) \quad \text{pour tout } x > 0, \boxed{h^{(n)}(x) = \frac{1}{(x(1+x))^n} P_n(x) + \frac{\lambda_n}{x^n} h(x)} \quad \text{avec} \quad \lambda_{n+1} = -\frac{2n+1}{2}\lambda_n.$$
   Préciser les valeurs de P_0 et λ_0.
   (c) Montrer : $\lambda_n = \dfrac{(-1)^n n!}{2^{2n}} \dbinom{2n}{n}$.
   Le cours de mathématiques de seconde année permettra de justifier facilement que **la fonction** h **est de classe** C^∞ **sur** $\mathbb{R}^+$: **on admet ce résultat** pour la suite du problème.
   (d) Rappeler l'énoncé de la formule de Taylor-Young (hypothèses comprises).
   En déduire l'expression de $h^{(n)}(0)$ en fonction de n.
   (e) A l'aide de $(*)$, calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(x^n h^{(n)}(x)\right)$, et en déduire $P_n(0)$.
3. Une relation pour P_n
   (a) Prouver que, pour tout $x \geqslant 0$:
   $$2xh^{(n+1)}(x) + (2n+1)h^{(n)}(x) = Q^{(n)}(x) \quad \text{où} \quad Q : x \mapsto Q(x) = \frac{1}{1+x}.$$
   (b) Par ailleurs, déterminer l'expression de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction Q.
   (c) A l'aide de $(*)$, en déduire l'égalité :
   $$2P_{n+1}(x) + (2n+1)(1+x)P_n(x) = (-1)^n n! x^n.$$
   (d) Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, les polynômes P_n et P_{n+1} n'ont aucune racine commune dans $\mathbb{C}$.