### L'ensemble $\mathbb{C}$, forme algébrique, conjugaison, module, inégalité triangulaire

**Exercice 1** *Donner la forme algèbrique (i.e. $z=a+ib$ où $a,b$ sont réels) des complexes suivants :*
$z_1=(2+3i)(3+4i)$, $z_2=\dfrac{2+i}{3-2i}$, $z_3=(1+i)^2$, $z_4=(1+i)^7$.

**Exercice 2** *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1+i)z+(1-i)=0$.*

**Exercice 3** *Résoudre l'équation $(3+i)z+(2-3i)\overline{z}=2i$.*

**Exercice 4** *Déterminer le lieu des points $M$ d'affixe $z$ tels que* ① $\dfrac{z}{z-1}\in\mathbb{R}$, ② $\dfrac{z-i}{z+1}\in\mathbb{R}$, ③ $\dfrac{z-i}{z+1}\in i\mathbb{R}$.

**Exercice 5** *Déterminer le lieu des points $M$ d'affixe $z$ tel que* $\left(\dfrac{z}{z-1}\right)^2\in\mathbb{R}$.

**Exercice 6** *Résoudre géométriquement* $\begin{cases} |z-i|=1 \\ |z|=|z-1-i| \end{cases}$.

**Exercice 7** *Soient $a$ et $b$ deux complexes non nuls. Montrer que* $\left|\dfrac{a}{|a|^2}-\dfrac{b}{|b|^2}\right|=\dfrac{|a-b|}{|a|\,|b|}$.

**Exercice 8** *Soient $a,b$ et $c$ dans $\mathbb{C}$, montrer que*

$$|1+a|+|a+b|+|b|\geq 1$$

**Exercice 9** *Soit $(z,z')\in\mathbb{C}^2$, montrer la seconde inégalité triangulaire*

$$||z|-|z'||\leq|z+z'| \text{ et } ||z|-|z'||\leq|z-z'|$$

**Exercice 10** *Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|\neq 1$ et $n\in\mathbb{N}$, on a*

$$\left|\frac{1-z^n}{1-z}\right|\leq\frac{1-|z|^n}{1-|z|}$$

**Exercice 11** *Inégalité de Ptolémée*

1. *Montrer que* $\forall(X,Y,Z)\in\mathbb{C}^3,\quad |X|\,|Y-Z|\leq|Y|\,|Z-X|+|Z|\,|X-Y|$.
2. *En déduire l'inégalité de Ptolémée:* $\forall(x,y,z,w)\in\mathbb{C}^4,\quad |x-z|\,|w-y|\leq|x-y|\,|z-w|+|x-w|\,|y-z|$.
3. *Donner une interprétation geométrique de cette inégalité.*

**Exercice 12** *Identité du parallélogramme*
*Montrer que* $\forall(x,y)\in\mathbb{C}^2,\ |x+y|^2+|x-y|^2=2\left(|x|^2+|y|^2\right)$ *et donner une interprétation geométrique de cette égalité.*

**Exercice 13** *Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|\leq 1$, montrer que $\left|z^3+2iz\right|\leq 3$. Déterminer les $z$ pour lesquels il y a égalité.*

**Exercice 14** *Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z-(1+i)|\leq 1$, montrer que $\sqrt{10}-1\leq|z-4|\leq\sqrt{10}+1$. Donner une interprétation géométrique de cette double inégalité.*

### Forme polaire, argument

**Exercice 15** *Donner la forme trigonométique des complexes suivants :* $4+4i,\ -2,\ 2i,\ \sqrt{3}-i$ *et* $3+\sqrt{3}i$.

**Exercice 16** *Donner la forme algbrique et trigonométrique de* ① $\dfrac{-1+3i}{1+2i}$ ② $\dfrac{4e^{i\frac{\pi}{2}}}{3e^{i\frac{\pi}{3}}}$.

**Exercice 17** *Forme trigonométrique de* ① $1+\sqrt{3}i$ ① $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$

**Exercice 18** *Montrer que* $(|z| = 1$ *et* $z \neq 1) \Rightarrow i\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right) \in \mathbb{R}$.

**Exercice 19** *Soient* $a, b$ *et* $c$ *trois complexes de module* 1*, montrer que* $|ab+bc+ca| = |a+b+c|$.

**Exercice 20** *Donner la forme polaire de :* $1+i,\ 1-i,\ i-1,\ \sqrt{3}+i$. *En déduire*

$$\frac{(i-1)^5}{(i+1)^4},\ (1+i)^{44},\ \left(\frac{-4}{\sqrt{3}+i}\right)^9$$

**Exercice 21** *Donner la forme trigonométrique de* $(1+i\tan\theta)^2$ *pour* $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

**Exercice 22** *Soient* $a$ *et* $b$ *deux nombres complexes de module* 1 *tels que* $ab \neq -1$*, montrer que* $\dfrac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}$.

## Equations du second degré

**Exercice 23** *Racines deuxièmes de* ① $-3+4i$ ② $i$ ③ $e^{i\frac{\pi}{3}}$ ④ $4i\sqrt{3}-1$

**Exercice 24** *Résoudre* ① $z^2-3z+(3-i)=0$ ② $z^2-3z+4=0$ ③ $z^2-\sqrt{3}z+1-i\sqrt{3}=0$

**Exercice 25** *Résoudre* $z^2+iz+2=0$.

**Exercice 26** *Résoudre* $z^2-(4+i)z+5+5i=0$.

**Exercice 27** *Soit* $(E)$ *l'équation* $\left(z^2+3z-2\right)^2+\left(2z^2-3z+2\right)^2=0$.

1. *Montrer que si* $z$ *est racine de* $(E)$ *alors* $\overline{z}$ *également.*
2. *Soient* $(a,b) \in \mathbb{C}$ *simplifier* $(a+ib)(a-ib)$.
3. *Résoudre* $(E)$.

**Exercice 28** *Résoudre dans* $\mathbb{C}$

1. $2z^3-(1+2i)z^2+(25i-1)z+13i=0$ *sachant qu'il y a une racine réelle.*
2. $z^4-4(1+i)z^3+12iz^2+8(1-i)z-5=0$, *sachant qu'il y a une racine réelle et une imaginaire pure.*

**Exercice 29** *Résoudre* $z^8-2\left(i\sqrt{3}-1\right)z^4-8\left(1+i\sqrt{3}\right)=0$.

## Coefficients et formule du binôme

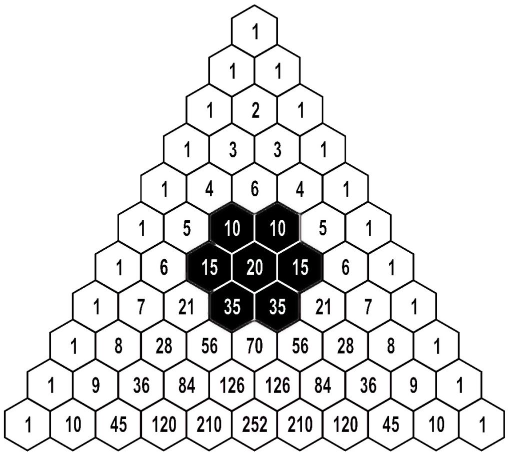
**Exercice 30** *Montrer sans calculatrice que* $6! \times 7! = 10!$ *(Seul cas de factorielle, produit de deux factorielles consécutives.).*

**Exercice 31** *Calculer simplement (à la main ...)* $999\,999^3$.

**Exercice 32** *Le coefficient du terme en* $x^6$ *de* $\left(2x^3+\dfrac{\sqrt{3}}{x}\right)^{10}$ *peut s'écrire* $2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$. *Déterminer* $a, b, c$ *et* $d$.

**Exercice 33** *Simplifier* ① $\dfrac{(n+1)!}{n!}-\dfrac{(n+2)!}{(n+1)!}$ ② $\dfrac{k!\dbinom{n}{k}}{(n+1)!}$ ③ $\dfrac{\dbinom{2n+1}{n}}{\dbinom{2n}{n}}+\dfrac{1}{n+1}$.

**Exercice 34** *Si on considère le triangle de Pascal*




*Montrer que le produit des 6 coefficients qui entourent un des coefficients est le carré d'un entier.*

**Exercice 35** *Soit* $g(x) = (\cos x + \sin x)^5 + (\cos x - \sin x)^5$*, montrer que* $g(x)$ *s'exprime uniquement en fonction de* $\cos(x)$.

**Exercice 36** *Calculer pour* $n \in \mathbb{N}$*, la somme* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ *(attention au cas particulier* $n = 0$*).*

**Exercice 37** *Calculer pour* $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$.

**Exercice 38** *Calculer pour* $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}$ *en fonction de* $n$ *(bien lire l'énoncé ....).*

**Exercice 39** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $1 \leq k \leq n$*. Montrer que* $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$.

1. *En déduire la valeur de* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
2. *Soit* $X$ *une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramétre* $n$ *et* $p \in [0,1]$ *(*$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$*). Calculer l'espérance de* $X$ *(i.e. calculer* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$*).*

**Exercice 40** *Soient* $k, p, n$ *des entiers naturels tels que* $0 \leq p \leq k \leq n$.

1. *Montrer que* $\dbinom{n-p}{k-p}\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{k}\dbinom{k}{p}$.
2. *En déduire la valeur des sommes* $S_1 = \displaystyle\sum_{p=0}^{k} \binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p}$ *et* $S_2 = \displaystyle\sum_{k=p}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{p}$.

## Trigonométrie

**Exercice 41** *Calculer les valeurs des fonctions trigonométriques en* $a$, $b$, $a+b$ *et* $a-b$*, lorsque cela est possible pour :*

① $\begin{cases} \sin a = \frac{2}{5} & 0 < a < \frac{\pi}{2} \\ \sin b = \frac{3}{5} & \frac{\pi}{2} < b < \pi \end{cases}$ ② $\begin{cases} \cos a = -\frac{1}{2} & \frac{\pi}{2} < a < \pi \\ \sin b = -\frac{1}{3} & \pi < b < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$ ③ $\begin{cases} \cos a = \frac{5}{13} & 0 < a < \frac{\pi}{2} \\ \sin b = \frac{12}{13} & 0 < b < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

**Exercice 42** *Résoudre les inéquations suivantes :*

① $\cos x > 0$ , $-1 < \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ , $|\cos x| < \frac{1}{2}$ , $-1 < \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{2}$ , $\cos^2 x > \frac{1}{2}$
② $\sin x \leq 0$ , $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ , $|\sin x| \leq \frac{1}{2}$ , $-\frac{1}{2} < \sin 2x < \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ , $3 - 4\sin^2 x < 0$
③ $\tan x \geq 0$ , $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \tan x < \sqrt{3}$ , $|\tan x| < 1$ , $-\sqrt{3} < \tan(3x) < \frac{1}{\sqrt{3}}$ , $\tan^2 x - 1 \geq 0$

**Exercice 43** *Ecrire sous la forme* $a\cos(\theta + \alpha)$ *et* $b\sin(\theta+\beta)$ *les expressions suivantes :*

① $\cos\theta + \sin\theta$, $\cos\theta - \sin\theta$ ② $\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta$, $-\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta$
③ $\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta$, $-\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta$ ④ $\sqrt{2}\cos\theta + \sqrt{6}\sin\theta$, $\sqrt{3}\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta$

**Exercice 44** *Soient* $p$ *et* $q$ *deux réels tels que* $\cos p \neq 0$ *et* $\cos q \neq 0$. *Démontrer que* $\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$ *puis résoudre les équations suivantes* $\tan x = \tan 2x$, $\tan x + \tan 2x = 0$ *et* $\tan 2x + \tan\frac{x}{2} = 0$.

**Exercice 45** *Factoriser les expressions suivantes :*

① $\cos^2 2x - \cos^2 x$ ② $\sin^2 2x - \sin^2\frac{x}{2}$ ③ $\sin^2\frac{5x}{2} - \cos^2\frac{3x}{4}$
④ $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x$ ⑤ $\sin x + \sin 2x + \sin 3x$ ⑥ $1 + 2\cos x + \cos 2x$
⑦ $1 + \sin 2x - \cos 2x$ ⑧ $\tan x + \tan 3x$ ⑨ $1 - \tan x \tan 2x$

**Exercice 46** *Résoudre les équations trigonométriques dans* $[-\pi, \pi]$ *:* $^{(1)}$ $\cos 3x - \cos 2x = 0$ *et* $^{(2)}$ $\sin x - \sin 5x = 0$.

**Exercice 47** *Résoudre* ① $\sin x + \dfrac{1}{4\cos x} = 0$ *et* ② $\sin x + \dfrac{\cos 2x}{2\cos x} = 0$

**Exercice 48** *Résoudre les équations suivantes :*

① $\cos x + \sin x = 1$ ② $\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = \sqrt{2}$ ③ $\sqrt{6}\cos 2x + \sqrt{2}\sin 2x = -2$

**Exercice 49** *Résoudre les inéquations suivantes :*

① $\cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > 0$ ② $\sin 2x > \sin 3x$ ③ $\cos x \sin^2 x > \sin x \cos^2 x$
④ $\cos x + \sin x - 1 < 0$ ⑧ $\tan x > \tan 3x$ ⑨ $\tan^2 x - \left(\sqrt{3} - 1\right)\tan x - \sqrt{3} < 0$

**Exercice 50** *Déterminer le module et l'argument de* $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ *et* $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$. *En déduire les valeurs exactes de* $\cos\dfrac{\pi}{12}$ *et de* $\sin\dfrac{\pi}{12}$ *et* $\tan\dfrac{\pi}{12}$.

**Exercice 51** *Linéariser* ① $\sin^3(x)$, ② $\cos^3(x)$ , ③ $\sin^4(x)$ , ④ $\cos^4(x)$.

**Exercice 52** *Trouver deux polynômes* $P$ *et* $Q$ *tels que* $\cos(4x) = P(\cos(x))$ *et* $\sin(4x) = \sin(x) \times Q(\cos(x))$.

**Exercice 53** *Calculer pour* $a \in \mathbb{R}$ *la somme* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(ka)$.

**Exercice 54** *Calculer pour* $(a, b) \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{R}$ *les sommes* $C = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(ak + b)$ *et* $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(ak+b)$.

## Racines énièmes

**Exercice 55** *Calculer* $\left(1 + i\sqrt{2}\right)^3$ *et en déduire les solutions de* $z^3 = -5 + i\sqrt{2}$ *et de* $z^3 = 5 + i\sqrt{2}$.

**Exercice 56** *Soit* $n \geq 2$, *résoudre* $z^n = (1 + i)$.

**Exercice 57** *On considère l'équation* $(E) : (z+1)^5 = (z-1)^5$

1. *A l'aide du binôme de Newton développer* $(z+1)^5 - (z-1)^5$ *et en déduire les solutions de* $(E)$. *Que constate-t-on ?*

2. *Exprimer les solutions de* $(E)$ *à l'aide des racines cinquièmes de* $1$. *Simplifier les expressions obtenues.*
3. *En déduire* $\tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

**Exercice 58** *Résoudre, dans* $\mathbb{C}$, $(z-1)^n = (z+1)^n$ *où* $n \geq 2$.

**Exercice 59** *Pour* $n \geq 1$, *soient* $(\omega_k)_{0\leq k\leq n-1}$ *les racines énièmes de l'unité* ($\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$), *calculer*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \ \text{et} \ \prod_{k=0}^{n-1} \omega_k$$

### Géométrie des complexes

**Exercice 60** *Déterminer le lieu des points* $M$ *d'affixe* $z$ *telle que*

1. *Les points d'affixe* $1+i$, $z+i$ *et* $1+iz$ *sont alignés.*
2. *Les points d'affixe* $z, z^2$ *et* $z^3$ *forment un triangle rectangle en* $N$ *d'affixe* $z^2$.
3. *Les points d'affixe* $z$, $i$ *et* $iz$ *forment un triangle rectangle isocèle en* $N$ *d'affixe* $i$.

**Exercice 61** ⓔ *Déterminer le lieu des points* $M$ *d'affixe* $z$ *tels que les points* $M(z)$, $N(z^2)$ *et* $P\left(\dfrac{1}{z}\right)$ *soient alignés.*

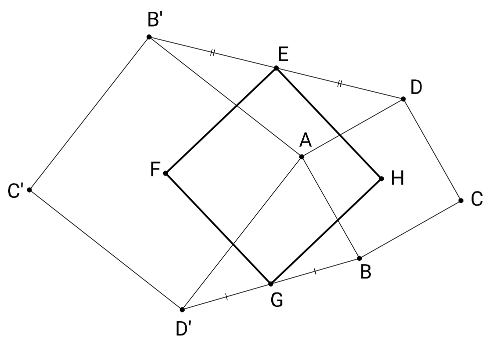
**Exercice 62** *On considère la fonction* $f$ *de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$ *définie par*

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z \neq -i,\ f(z) = \frac{z-2}{z+i}$$

1. *Déterminer le lieu des points* $M$ *d'affixe* $z$ *tels que* $|f(z)| = 1$.
2. *Déterminer le lieu des points* $M$ *d'affixe* $z$ *tels que* $f(z) \in \mathbb{R}$.
3. *Déterminer le lieu des points* $M$ *d'affixe* $z$ *tels que* $f(z) \in i\mathbb{R}$.

**Exercice 63** *Soient* $A, B, C$ *trois points distincts d'affixes respectives* $a, b$ *et* $c$. *Montrer que le triangle* $(ABC)$ *est équilatéral si et seulement si* $a^2+b^2+c^2 = ab+ac+bc$.

**Exercice 64** *Le théorème de Finsler–Hadwiger (1937)*




*Soient* $ABCD$ *et* $A'B'C'D'$ *deux carrés, on note* $E$ *et* $G$ *les milieux de* $B'D$ *et* $D'B$, $F$ *et* $H$ *les centres des carrés. Montrer que* $EFGH$ *est un carré.*

### Exponentielle complexe

**Exercice 65** *Résoudre* ① $e^z = 1$, ② $e^z = 2i$, ③ $e^z + e^{-z} + 1 = 0$, ④ $\left\{\begin{array}{ll} e^z + e^{z'} & = 2 \\ e^{z+z'} & = 2 \end{array}\right.$.

**Exercice 66** *Soit* $z \in \mathbb{C}$, *on définit* $\cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ *et* $\sin(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}$

1. *Calculer* $Z = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{i \ln 2}{2}\right)$, *préciser le module et l'argument de* $Z$.
2. *Que vaut* $\cos^2 z + \sin^2 z$ *?*
3. *Que valent les conjuguées de* $\cos(z)$ *et de* $\sin(z)$ *?*
4. *Résoudre* ① $\cos(z) = \dfrac{3i}{4}$ *et* ② $\sin(z) = \dfrac{5}{4}$.