

L'ensemble \mathbb{C} , forme algébrique, conjugaison, module, inégalité triangulaire

Exercice 1 Donner la forme algébrique (i.e. $z = a + ib$ où a, b sont réels) des complexes suivants :

$$z_1 = (2 + 3i)(3 + 4i), z_2 = \frac{2+i}{3-2i}, z_3 = (1+i)^2, z_4 = (1+i)^7.$$

Exercice 2 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(1+i)z + (1-i) = 0$.

Exercice 3 Résoudre l'équation $(3+i)z + (2-3i)\bar{z} = 2i$.

Exercice 4 Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que ① $\frac{z}{z-1} \in \mathbb{R}$, ② $\frac{z-i}{z+1} \in \mathbb{R}$, ③ $\frac{z-i}{z+1} \in i\mathbb{R}$.

Exercice 5 Déterminer le lieu des points M d'affixe z tel que $\left(\frac{z}{z-1}\right)^2 \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 Résoudre géométriquement $\begin{cases} |z-i| = 1 \\ |z| = |z-1-i| \end{cases}$.

Exercice 7 Soient a et b deux complexes non nuls. Montrer que $\left|\frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2}\right| = \frac{|a-b|}{|a||b|}$.

Exercice 8 Soient a, b et c dans \mathbb{C} , montrer que

$$|1+a| + |a+b| + |b| \geq 1$$

Exercice 9 Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, montrer la seconde inégalité triangulaire

$$\||z| - |z'|\| \leq |z+z'| \text{ et } ||z| - |z'|\| \leq |z-z'|$$

Exercice 10 Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|\frac{1-z^n}{1-z}\right| \leq \frac{1-|z|^n}{1-|z|}$$

Exercice 11 Inégalité de Ptolémée

1. Montrer que $\forall (X, Y, Z) \in \mathbb{C}^3, |X||Y-Z| \leq |Y||Z-X| + |Z||X-Y|$.
2. En déduire l'inégalité de Ptolémée: $\forall (x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4, |x-z||w-y| \leq |x-y||z-w| + |x-w||y-z|$.
3. Donner une interprétation géométrique de cette inégalité.

Exercice 12 Identité du parallélogramme

Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2, |x+y|^2 + |x-y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$ et donner une interprétation géométrique de cette égalité.

Exercice 13 Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq 1$, montrer que $|z^3 + 2iz| \leq 3$. Déterminer les z pour lesquels il y a égalité.

Exercice 14 Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - (1+i)| \leq 1$, montrer que $\sqrt{10} - 1 \leq |z-4| \leq \sqrt{10} + 1$. Donner une interprétation géométrique de cette double inégalité.

Forme polaire, argument

Exercice 15 Donner la forme trigonométrique des complexes suivants : $4 + 4i$, -2 , $2i$, $\sqrt{3} - i$ et $3 + \sqrt{3}i$.

Exercice 16 Montrer que $(|z| = 1 \text{ et } z \neq 1) \Rightarrow i\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \in \mathbb{R}$.

Exercice 17 Soient a, b et c trois complexes de module 1, montrer que $|ab + bc + ca| = |a + b + c|$.

Exercice 18 Donner la forme polaire de : $1 + i$, $1 - i$, $i - 1$, $\sqrt{3} + i$. En déduire

$$\frac{(i - 1)^5}{(i + 1)^4}, (1 + i)^{44}, \left(\frac{-4}{\sqrt{3} + i}\right)^9$$

Exercice 19 Donner la forme trigonométrique de $(1 + i \tan \theta)^2$ pour $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 20 Soient a et b deux nombres complexes de module 1 tels que $ab \neq -1$, montrer que $\frac{a + b}{1 + ab} \in \mathbb{R}$.

Equations du second degré

Exercice 21 Résoudre $z^2 + iz + 2 = 0$.

Exercice 22 Résoudre $z^2 - (4 + i)z + 5 + 5i = 0$.

Exercice 23 Soit (E) l'équation $(z^2 + 3z - 2)^2 + (2z^2 - 3z + 2)^2 = 0$.

1. Montrer que si z est racine de (E) alors \bar{z} également.
2. Soient $(a, b) \in \mathbb{C}$ simplifier $(a + ib)(a - ib)$.
3. Résoudre (E) .

Exercice 24 Résoudre dans \mathbb{C}

1. $2z^3 - (1 + 2i)z^2 + (25i - 1)z + 13i = 0$ sachant qu'il y a une racine réelle.
2. $z^4 - 4(1 + i)z^3 + 12iz^2 + 8(1 - i)z - 5 = 0$, sachant qu'il y a une racine réelle et une imaginaire pure.

Exercice 25 Résoudre $z^8 - 2(i\sqrt{3} - 1)z^4 - 8(1 + i\sqrt{3}) = 0$.

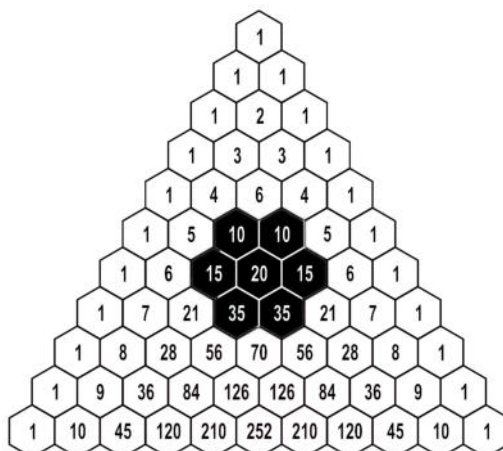
Coefficients et formule du binôme

Exercice 26 Montrer sans calculatrice que $6! \times 7! = 10!$ (Seul cas de factorielle, produit de deux factorielles consécutives.).

Exercice 27 Calculer simplement (à la main ...) $999\,999^3$.

Exercice 28 Le coefficient du terme en x^6 de $\left(2x^3 + \frac{\sqrt{3}}{x}\right)^{10}$ peut s'écrire $2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$. Déterminer a, b, c et d .

Exercice 29 Si on considère le triangle de Pascal



Montrer que le produit des 6 coefficients qui entourent un des coefficients est le carré d'un entier.

Exercice 30 Soit $g(x) = (\cos x + \sin x)^5 + (\cos x - \sin x)^5$, montrer que $g(x)$ s'exprime uniquement en fonction de $\cos(x)$.

Exercice 31 Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$ (attention au cas particulier $n = 0$).

Exercice 32 Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$.

Exercice 33 Calculer pour $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1}$ en fonction de n (bien lire l'énoncé ...).

Exercice 34 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$. Montrer que $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

1. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

2. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre n et $p \in [0, 1]$ ($X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$). Calculer l'espérance de X (i.e. calculer $\sum_{k=0}^n k P(X = k) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$).

Exercice 35 Soient k, p, n des entiers naturels tels que $0 \leq p \leq k \leq n$.

1. Montrer que $\binom{n-p}{k-p} \binom{n}{p} = \binom{n}{k} \binom{k}{p}$.

2. En déduire la valeur des sommes $S_1 = \sum_{p=0}^k \binom{n-p}{k-p} \binom{n}{p}$ et $S_2 = \sum_{k=p}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{p}$.

Trigonométrie

Exercice 36 Calculer les valeurs des fonctions trigonométriques en a , b , $a + b$ et $a - b$, lorsque cela est possible pour :

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} \sin a = \frac{2}{5} & 0 < a < \frac{\pi}{2} \\ \sin b = \frac{2}{5} & \frac{\pi}{2} < b < \pi \end{cases} \quad \textcircled{2} \quad \begin{cases} \cos a = -\frac{1}{2} & \frac{\pi}{2} < a < \pi \\ \sin b = -\frac{1}{3} & \pi < b < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad \textcircled{3} \quad \begin{cases} \cos a = \frac{5}{13} & 0 < a < \frac{\pi}{2} \\ \sin b = \frac{12}{13} & 0 < b < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Exercice 37 Résoudre les inéquations suivantes :

$$\begin{array}{llll} \textcircled{1} & \cos x > 0 & , & -1 < \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} & , & |\cos x| < \frac{1}{2} & , & -1 < \cos(2x + \frac{\pi}{4}) \leq \frac{1}{2} & , & \cos^2 x > \frac{1}{2} \\ \textcircled{2} & \sin x \leq 0 & , & -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} & , & |\sin x| \leq \frac{1}{2} & , & -\frac{1}{2} < \sin 2x < \frac{\sqrt{3}+1}{2} & , & 3 - 4 \sin^2 x < 0 \\ \textcircled{3} & \tan x \geq 0 & , & \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \tan x < \sqrt{3} & , & |\tan x| < 1 & , & -\sqrt{3} < \tan(3x) < \frac{1}{\sqrt{3}} & , & \tan^2 x - 1 \geq 0 \end{array}$$

Exercice 38 Ecrire sous la forme $a \cos(\theta + \alpha)$ et $b \sin(\theta + \beta)$ les expressions suivantes :

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} & \cos \theta + \sin \theta, \cos \theta - \sin \theta \\ \textcircled{2} & \sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta, -\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta \\ \textcircled{3} & \cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta, -\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta \\ \textcircled{4} & \sqrt{2} \cos \theta + \sqrt{6} \sin \theta, \sqrt{3} \cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta \end{array}$$

Exercice 39 Soient p et q deux réels tels que $\cos p \neq 0$ et $\cos q \neq 0$. Démontrer que $\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$ puis résoudre les équations suivantes $\tan x = \tan 2x$, $\tan x + \tan 2x = 0$ et $\tan 2x + \tan \frac{x}{2} = 0$.

Exercice 40 Factoriser les expressions suivantes :

$$\begin{array}{llll} \textcircled{1} & \cos^2 2x - \cos^2 x & \textcircled{2} & \sin^2 2x - \sin^2 \frac{x}{2} & \textcircled{3} & \sin^2 \frac{5x}{2} - \cos^2 \frac{3x}{4} \\ \textcircled{4} & 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x & \textcircled{5} & \sin x + \sin 2x + \sin 3x & \textcircled{6} & 1 + 2 \cos x + \cos 2x \\ \textcircled{7} & 1 + \sin 2x - \cos 2x & \textcircled{8} & \tan x + \tan 3x & \textcircled{9} & 1 - \tan x \tan 2x \end{array}$$

Exercice 41 Résoudre les équations trigonométriques dans $[-\pi, \pi]$: ⁽¹⁾ $\cos 3x - \cos 2x = 0$ et ⁽²⁾ $\sin x - \sin 5x = 0$.

Exercice 42 Résoudre ① $\sin x + \frac{1}{4 \cos x} = 0$ et ② $\sin x + \frac{\cos 2x}{2 \cos x} = 0$

Exercice 43 Résoudre les équations suivantes :

$$\textcircled{1} \quad \cos x + \sin x = 1 \quad \textcircled{2} \quad \cos(2x) - \sqrt{3} \sin(2x) = \sqrt{2} \quad \textcircled{3} \quad \sqrt{6} \cos 2x + \sqrt{2} \sin 2x = -2$$

Exercice 44 Résoudre les inéquations suivantes :

$$\begin{array}{llll} \textcircled{1} & \cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > 0 & \textcircled{2} & \sin 2x > \sin 3x & \textcircled{3} & \cos x \sin^2 x > \sin x \cos^2 x \\ \textcircled{4} & \cos x + \sin x - 1 < 0 & \textcircled{8} & \tan x > \tan 3x & \textcircled{9} & \tan^2 x - (\sqrt{3} - 1) \tan x - \sqrt{3} < 0 \end{array}$$

Exercice 45 Déterminer le module et l'argument de $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et de $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\tan \frac{\pi}{12}$.

Exercice 46 Linéariser ① $\sin^3(x)$, ② $\cos^3(x)$, ③ $\sin^4(x)$, ④ $\cos^4(x)$.

Exercice 47 Trouver deux polynômes P et Q tels que $\cos(4x) = P(\cos(x))$ et $\sin(4x) = \sin(x) \times Q(\cos(x))$.

Exercice 48 Calculer pour $a \in \mathbb{R}$ la somme $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(ka)$.

Exercice 49 Calculer pour $(a, b) \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{R}$ les sommes $C = \sum_{k=0}^n \cos(ak + b)$ et $S = \sum_{k=0}^n \sin(ak + b)$.

Racines énièmes

Exercice 50 Calculer $(1 + i\sqrt{2})^3$ et en déduire les solutions de $z^3 = -5 + i\sqrt{2}$ et de $z^3 = 5 + i\sqrt{2}$.

Exercice 51 Soit $n \geq 2$, résoudre $z^n = (1 + i)$.

Exercice 52 On considère l'équation (E) : $(z + 1)^5 = (z - 1)^5$

1. A l'aide du binôme de Newton développer $(z + 1)^5 - (z - 1)^5$ et en déduire les solutions de (E). Que constate-t-on ?
2. Exprimer les solutions de (E) à l'aide des racines cinquièmes de 1. Simplifier les expressions obtenues.
3. En déduire $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 53 Résoudre, dans \mathbb{C} , $(z - 1)^n = (z + 1)^n$ où $n \geq 2$.

Exercice 54 Pour $n \geq 1$, soient $(\omega_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ les racines énièmes de l'unité ($\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$), calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n-1} \omega_k$$

Géométrie des complexes

Exercice 55 Déterminer le lieu des points M d'affixe z telle que

1. Les points d'affixe $1 + i$, $z + i$ et $1 + iz$ sont alignés.
2. Les points d'affixe z , z^2 et z^3 forment un triangle rectangle en N d'affixe z^2 .
3. Les points d'affixe z , i et iz forment un triangle rectangle isocèle en N d'affixe i .

Exercice 56 © Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que les points $M(z)$, $N(z^2)$ et $P\left(\frac{1}{z}\right)$ soient alignés.

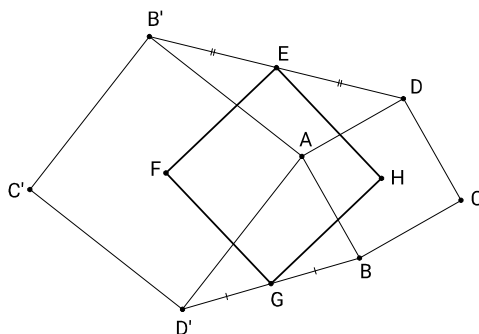
Exercice 57 On considère la fonction f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, z \neq -i, f(z) = \frac{z-2}{z+i}$$

1. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$.
2. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z) \in i\mathbb{R}$.

Exercice 58 Soient A, B, C trois points distincts d'affixes respectives a, b et c . Montrer que le triangle (ABC) est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

Exercice 59 Le théorème de Finsler–Hadwiger (1937)



Soient $ABCD$ et $A'B'C'D'$ deux carrés, on note E et G les milieux de $B'D$ et $D'B$, F et H les centres des carrés. Montrer que $EFGH$ est un carré.

Exponentielle complexe

Exercice 60 Résoudre ① $e^z = 1$, ② $e^z = 2i$, ③ $e^z + e^{-z} + 1 = 0$, ④ $\begin{cases} e^z + e^{z'} = 2 \\ e^{z+z'} = 2 \end{cases}$.

Exercice 61 Soit $z \in \mathbb{C}$, on définit $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ et $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

1. Calculer $Z = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{i \ln 2}{2}\right)$, préciser le module et l'argument de Z .
2. Que vaut $\cos^2 z + \sin^2 z$?
3. Que valent les conjuguées de $\cos(z)$ et de $\sin(z)$?
4. Résoudre ① $\cos(z) = \frac{3i}{4}$ et ② $\sin(z) = \frac{5}{4}$.