Exercice 1 *On rappelle que $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et plus généralement $\mathbb{R}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) sont des espaces vectoriels pour les lois usuelles. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels pour ces mêmes lois ?*

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$.
2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$.
3. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0 \text{ ou } x + y = 0\}$
4. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$.
5. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + y)(x - y) = 0\}$.
6. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$
7. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x + 1)^2 + z - 4y = (x - 1)^2\}$
8. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0 \text{ et } x + y - z = 0\}$
9. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$.
10. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + a = 0 \text{ et } x + 3az = 0\}$ où a est un réel fixé.
11. $A =$ l'ensemble des triplets de $\mathbb{R}^3$ pouvant s'écrire $(\alpha - \beta, \beta, \alpha + \beta)$ avec α et β réels.

Exercice 2 *On rappelle que $\mathbb{K}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) est un espace vectoriel pour les lois usuelles. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$?*

1. $A = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 = 0\}$.
2. $A = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 = x_2 = 0\}$.
3. $A = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 = x_2\}$.
4. $A = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 \neq 0\}$.
5. $A = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 + x_2 = 0\}$.
6. $A = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 \times x_2 = 0\}$.

Exercice 3 *On rappelle que l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs réelles est un espace vectoriel pour les lois usuelles. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels pour ces mêmes lois ?*

1. $A =$ ensemble des suites réelles convergentes vers 1.
2. $A =$ ensemble des suites réelles convergentes.
3. $A =$ ensemble des suites réelles convergentes vers 0.
4. $A =$ ensemble des suites réelles divergentes sans limite infinie.
5. $A =$ ensemble des suites réelles divergentes de limite $+\infty$.
6. $A =$ ensemble des suites réelles négligeables devant n^2.
7. $A =$ ensemble des suites réelles équivalentes à n^2.
8. $A =$ ensemble des suites réelles u vérifiant : pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 5u_n - 3$.
9. $A =$ ensemble des suites réelles u vérifiant : pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 5u_n$.
10. $A =$ ensemble des suites réelles u vérifiant : pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} - 3u_n$.
11. $A =$ ensemble des suites réelles arithmétiques.
12. $A =$ ensemble des suites réelles géométriques.
13. $A =$ ensemble des suites réelles arithmético-géométriques.

14. $A =$ ensemble des suites réelles bornées.
15. $A =$ ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.
16. $A =$ ensemble des suites réelles stationnaires.
17. $A =$ ensemble des suites réelles périodiques.

Exercice 4 *On rappelle que l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions numériques de la variable réelle est un espace vectoriel pour les lois usuelles. Soit $I \subset \mathbb{R}$, une partie de $\mathbb{R}$ (par exemple un intervalle). On rappelle également que $\mathbb{R}^I$, $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, $\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ respectivement ensemble des fonctions définies, continues, dérivables, de classe C^n, indéfiniment dérivables sur I à valeurs réelles, sont des espaces vectoriels. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels pour ces mêmes lois ?*

1. $A =$ ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et paires.
2. $A =$ ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et nulle en 0.
3. $A =$ ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et nulles en 2 et en 5.
4. $A =$ ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et nulles en 2 ou en 5.
5. $A =$ ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et de limite nulle en $+\infty$.
6. $A =$ ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle «$y' + 2xy = 0$».
7. $A =$ ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle <<$y' + 2xy = \sin(x)$>>.
8. $A =$ ensemble des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et solutions de l'équation différentielle <<$y'' + 2y' + y = 0$>>.
9. $A =$ ensemble des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et solutions de l'équation différentielle <<$y'' + 2y' + y = 0$>> avec la condition $y(0) = 0$.
10. $A =$ ensemble des fonctions f continues sur $[0,1]$ vérifiant $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.
11. $A =$ ensemble des fonctions f continues sur $[0,1]$ vérifiant $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = a$ avec a fixé.
12. $A =$ ensemble des fonctions f définies sur $[0,1]$ vérifiant $f(0) = f(1)$.
13. $A =$ ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(1) = f(0) + 1$.
14. $A =$ ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(a - x)$, où a est un réel fixé.
15. $A =$ ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ telles qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$, tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + c$.
16. $A =$ ensemble des fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
17. $A =$ ensemble des fonctions monotones de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
18. $A =$ ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq 10$.
19. $A =$ ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
20. $A =$ ensemble des fonctions T-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $T > 0$ fixé.
21. $A =$ ensemble des fonctions périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, à période rationnelle.
22. $A =$ ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui peuvent s'écrire comme différence de deux fonctions croissantes.
23. $A =$ ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ pour lesquelles il existe un réel $M \geq 0$ tel que : $(|x| \geq M) \Rightarrow f(x) = 0$ (ensemble des fonctions <<à support compact>>).

Exercice 5 *On rappelle que l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels est un espace vectoriel pour les lois usuelles. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels pour ces mêmes lois ?*

1. *$A =$ ensemble des polynômes P vérifiant $P(0) = 1$.*

1. $A =$ ensemble des polynômes P vérifiant $P(0) = 0$.
2. $A =$ ensemble des polynômes admettant a pour racine, a étant un réel fixé.
3. $A =$ ensemble des polynômes admettant a et b pour racines, a et b étant deux réels fixés.
4. $A =$ ensemble des polynômes admettant (au moins) une racine réelle.
5. $A =$ ensemble des polynômes n'admettant pas de racine réelle.
6. $A =$ ensemble des polynômes P vérifiant $P'' + P = 0$.
7. $A =$ ensemble des polynômes de degré 3 exactement.
8. $A =$ ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n, noté $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 6 *On rappelle que l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées à coefficients réels de taille n est un espace vectoriel pour les lois usuelles.*
Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels pour ces mêmes lois ?

1. *$A =$ ensemble des matrices M telles que $M^2 = I_n$.*
2. *$A =$ ensemble des matrices M telles que $MB = 0$ où B est une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
3. *$A =$ ensemble des matrices M telles que ${}^tM = 2M + I_n$.*
4. *$A =$ ensemble des matrices M telles que ${}^tM = 2M$.*
5. *$A =$ ensemble des matrices M telles que PMP^{-1} est diagonale où $P \in GL_n(\mathbb{R})$ est fixé.*