Exercice 1 *Pour chacun des ensembles donnés, les mettre sous la forme d'un sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs (en particulier cela prouve qu'il s'agit bien de sous-espaces vectoriels)*

1. $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+3y=0\right\}$
2. $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+3y-2z=0\right\}$, *montrer qu'il s'agit d'un plan vectoriel.*
3. $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+3y-2z=0 \text{ et } x+y-z=0\right\}$, *montrer qu'il s'agit d'une droite vectorielle.*
4. $F = \left\{(\alpha+\beta, \alpha-2\beta, \alpha+3\beta) \in \mathbb{R}^3\ ,\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$, *montrer qu'il s'agit d'un plan vectoriel.*
5. $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+2y-z+t=0 \text{ et } x+y+2z-3t=0\right\}$, *montrer qu'il s'agit d'un plan vectoriel.*
6. $F = \{(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1=x_2\}$
7. $F = \{(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{k=1}^n x_k = 0\}$
8. $F = \{(x,2x), x \in \mathbb{R}\}$, *montrer qu'il s'agit d'une droite vectorielle.*
9. $F = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n\right\}$, *montrer qu'il s'agit d'une droite vectorielle.*
10. F *est l'ensemble des solutions de l'équation* $y'+xy=0$, *montrer qu'il s'agit d'une droite vectorielle.*
11. F *est l'ensemble des solutions de l'équation* $y''+y'+y=0$, *montrer qu'il s'agit d'un plan vectoriel.*
12. $F = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X],\quad \int_0^1 P(t)\,dt = 0\right\}$, *montrer qu'il s'agit d'un plan vectoriel.*
13. $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\quad P(1) = P(2) = 0\}$, *montrer qu'il s'agit d'une droite vectorielle.*
14. $F = \left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\cos x + be^x\right\}$, *montrer qu'il s'agit d'un plan vectoriel.*

Exercice 2

1. *On considère l'espace vectoriel (on ne demande pas de prouver qu'il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel)* $F = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X],\ \int_0^1 P(t)\,dt = 0\right\}$.
   Pour $k \in \{1,\cdots,n\}$, *on pose* $P_k(X) = X^k + \frac{2k}{k+1}X - 1$. *Montrer que* $\mathrm{Vect}(P_1,\cdots,P_n) \subset F$.
2. *Dans* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *soit* $F = \mathrm{Vect}\left(\exp, \dfrac{1}{\exp}\right)$ *et* $G = \mathrm{Vect}(\mathrm{ch},\mathrm{sh})$. *Montrer que* $F = G$.
3. *Dans* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *on définit les fonctions* f_1, f_2, f_3 *et* f_4 *par* $f_1(x) = 1,\ f_2(x) = \cos 2x,\ f_3(x) = \cos^2 x$ *et* $f_4(x) = \sin^2 x$.
   Soit $F = \mathrm{Vect}(f_1,f_2)$ *et* $G = \mathrm{Vect}(f_3,f_4)$. *Montrer que* $F = G$.

Exercice 3

1. *Montrer que* $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y-3z=0\right\}$ *et* $G = \mathrm{Vect}(1,2,-1)$ *sont en somme directe dans* $\mathbb{R}^3$.
2. *Pour quelles valeurs de* a, *les sous-espaces vectoriels* $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x-y+2z=0\right\}$ *et* $G = \mathrm{Vect}(1,a,1)$ *sont-ils en somme directe ?*
3. *Montrer que dans* $\mathbb{R}_3[X]$, *les sous espaces* $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P'(1) = 0\}$ *et* $G = \mathrm{Vect}\left(1+X^2\right)$ *sont en somme directe.*
4. *Dans* $\mathbb{R}^n$, *montrer que* $F = \{(x_1,\cdots,x_n),\ \sum_{k=1}^n kx_k = 0\}$ *et* $G = \{(x_1,\cdots,x_n),\ x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}$ *sont en somme directe.*
5. *Dans* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *montrer que* $F = \{f \text{ constante sur } \mathbb{R}\}$ *et* $G = \{f \text{ nulle en } x=2\}$ *sont en somme directe.*
6. *Dans* $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, *montrer que* $F = \left\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}),\ \int_0^\pi f(t)\,dt = 0\right\}$ *et* $G = \{f \text{ telle qu'il existe } a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax\}$ *sont en somme directe.*
7. *Soit* $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(1) = P(2) = 0\}$ *et* $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(1) = P(-1) = 0\}$ *sont-ils en somme directe dans* $\mathbb{R}_3[X]$ *?*

Exercice 4 *Montrer que les dans les exercices 3.1), 3.3), 3.5) et 3.6) les sous espaces sont supplémentaires. Pour l'exercice 3.6), donner la décomposition des fonctions* sin, cos *et* exp.