Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1 *Soit* $E=\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{u}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{v}=(1,0,1)$, *complèter* $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ *en une base de* E.

Exercice 2 *Soit* $E=\mathbb{R}_2[X]$, $P_1=X^2+1$ *et* $P_2=X+3$, *complèter* (P_1,P_2) *en une base de* E.

Exercice 3 *Soit* $E=\mathbb{R}^3$ *et* $F=\{(x,y,z)\in E,\ x+y=0\}$, *donner la dimension de* E.

Exercice 4 *Dans* $E=\mathbb{R}^3$, *soit* $F=\{(x,y,z)\,,\ 2x-y+z=0\}$, *justifier que* F *est un sous-espace vectoriel de* E. *En donner une base. Pour quelle valeur de* m, *le vecteur* $\overrightarrow{a}=(1,m,1)$ *est-il dans* F *? Donner alors ses coordonnées dans la base que vous avez choisi.*

Exercice 5 *Soit* $E=\left\{f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ f(x)=ae^x+be^{-x}+c\right\}$. *Donner une base de* E, *sa dimension.*

Exercice 6 *Dans* $\mathbb{R}^4$, *soit* $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, x+y=z+t=0\}$, *donner une base et la dimension de* F *ainsi que les coordonnés de* $a=(2,-2,-1,1)$ *dans cette base.*

Exercice 7 *Donner une base et la dimension de* $F=\left\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \text{ solution de } y''-3y'+3y=0\right\}$.

Exercice 8 *Donner une base et la dimension de* $F=\left\{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}-u_{n+1}+u_n=0\right\}$.

Exercice 9 *Soit* E *de dimension* n *et* $f\in\mathcal{L}(E)$ *telle que* $f^n=0$ *et* $f^{n-1}\neq 0$. *Soit* $a\in E$ *tel que* $f^{n-1}(a)\neq 0$, *montrer que la famille* $\left(f^k(a)\right)_{0\le k\le n-1}$ *est une base* $\mathcal{B}$ *de* E. *Si* x *a pour coordonnées* $(x_1,\cdots,x_n)$ *dans* $\mathcal{B}$, *quelles sont les coordonnées de* $f(x)$ *dans* $\mathcal{B}$ *?*

Exercice 10 *Soit* $E=\mathbb{R}_n[X]$ *et* $P_0=1$, $P_1=X$, $P_2=X(X-1)$,..., $P_n=X(X-1)...(X-n+1)$, *montrer que* $(P_i)_{0\le i\le n}$ *est une base de* E.

Exercice 11 *Sur* $E=\mathbb{R}_n[X]$, *pour* $k\in\{0,\cdots,n\}$ *on définit* $P_k(X)=X^{n-k}(1-X)^k$

1. *Montrer que la famille de polynôme* $(P_k)_{0\le k\le n}$ *est une base de* E.
2. *Soit* $x\neq 0$ *et* $i\in\{0,\cdots,n\}$ *montrer que*

$$x^i=\sum_{k=0}^{n-i}\binom{n-i}{k}x^{n-k}(1-x)^k$$

En déduire les coordonnées de X^i *dans cette base.*

Sous espaces vectoriels en dimension finie

Exercice 12 *Soit* $E=\mathbb{R}^3$, *on considère les ensembles* F *et* G *définis par*

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z)\in E,\ x-y+z=0\} \\ G &= \{(x,y,z)\in E,\ x+y=x+z=0\} \end{aligned}$$

Justifier que F *et* G *sont des sous espaces vectoriels de* E *et donner une famille génératrice de chacun d'eux. Montrer que* F *et* G *sont supplémentaires dans* E.

Exercice 13 *Soit* $E=\mathbb{R}_3[X]$, *on définit les ensembles* F *et* G *par*

$$\begin{aligned} F &= \{P\in E,\ P(1)-P'(-1)=P(-1)=0\} \\ G &= \{P\in E,\ P \text{ impair}\} \end{aligned}$$

1. *Justifier que* F *et* G *sont des sous-espaces vectoriels de* E. *Préciser leur dimension.*
2. *Montrer que* $F\oplus G=E$.

Exercice 14 *Soit* $E=\mathbb{R}_3[X]$ *l'ensemble des polynômes de degré au plus* 3 *et à coefficients dans* $\mathbb{R}$. *On définit* F *par* $F=\{P\in E,\ P(0)=P(1)-P'(1)=0\}$. *Montrer que* F *est un sous espace vectoriel de* E. *Soit* G *l'ensemble des polynômes pairs, de degré au plus* 3 *et à coefficients réels. Justifier que* G *est un sous-espace vectoriel de* E *et que* $E=F\oplus G$.

Exercice 15

1. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^5$ tels que $\dim F = \dim G = 3$, que dire de $F \cap G$?*

2. *On généralise, soit E de dimension n, F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F + \dim G > n$, que dire de $F \cap G$? Lorsque $\dim F + \dim G \leq n$, les deux sous espaces sont-ils en somme directe ?*

Rang d'une famille

Exercice 16 *A l'aide du calcul du rang, préciser si les familles suivantes sont des bases de $\mathbb{R}^4$. Donner, lorsque la famille est liée, une relation de dépendance, une base de l'espace engendré et un supplémentaire de cet espace.*

① $(1,2,0,1)\,,\ (4,1,1,0)\,,\ (2,0,1,0)\,,\ (0,1,0,0)$
② $(1,0,0,1)\,,\ (-1,1,2,-2)\,,\ (a,2,1,1)\,,\ (2,-1,1,1)$ *où* $a \in \mathbb{R}$
③ $(1,1,0,1)\,,\ (0,1,1,0)\,,\ (1,2,1,0)\,,\ (a,2,a,0)$ *où* $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 17 *Calculer, en fonction de m le rang de la famille $\overrightarrow{u} = (m,1,1)\,,\ \overrightarrow{v} = (1,m,1)$ et $\overrightarrow{w} = (1,1,m)$.*

Application linéaire en dimension finie

Exercice 18 *Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 2x+y+2z \\ x+2y+z \end{pmatrix}$. Donner une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$, en déduire $\operatorname{rg}(f)$, $\operatorname{Im}(f)$, $\ker f$.*

Exercice 19 *Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x-y \\ -x+2y+z \end{pmatrix}$. Calculer $f\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, en déduire $\operatorname{rg}(f)$ puis $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.*

Exercice 20 *Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+2z \\ x-2y-z \\ x+2y+3z \end{pmatrix}$. Déterminer $\operatorname{Im} f$, $\ker f$, ces deux sous-espaces vectoriels sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?*

Exercice 21 *Donner le noyau et l'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $f(P(X)) = P(X) - (X+1)P'(X)$ (après avoir justifié qu'il s'agit bien d'un endomorphisme).*

Exercice 22 *Soit f définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par $f(P(X)) = X^3 P\left(\dfrac{1}{X}\right)$. Vérifier que f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. Calculer $f \circ f$, que peut-on en déduire ?*

Exercice 23 *Soit $n \geq 2$, $E = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ définie par $f(e_i) = e_n$ si $1 \leq i \leq n-1$ et $f(e_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e_k$. Calculer $\operatorname{rg}(f)$, en déduire $\ker f$.*

Exercice 24 *Soit $E = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\forall i \in \{1, \cdots, n\}\,,\ f(e_i) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e_k$.*

1. *Quel est la rang de f. En déduire $\dim \ker f$.*

2. *Montrer que la famille $(e_2 - e_1, \cdots, e_n - e_1)$ est libre.*

3. *Calculer $f(e_k - e_1)$ pour $k \in \{1, \cdots, n\}$ et en déduire $\ker f$.*

Exercice 25 *On définit l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ par $\varphi(P) = \left(P(a), P'(a), P''(a), \cdots, P^{(n)}(a)\right)$ où a est un réel fixé. Montrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Exercice 26 *Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P(X)) = P(X+1) - P(X)$.*

1. *Montrer que f est linéaire et que $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.*

2. *Déterminer* $\ker f$*, en déduire* $\operatorname{rg}(f)$ *puis* $\operatorname{Im} f$*.*

Exercice 27 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$. On suppose que $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \ker f + \ker g$. Montrer que ces deux sommes sont directes.*

Exercice 28 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ montrer que les quatre propositions suivantes sont équivalentes :*

$$\begin{array}{llll} (1) & E = \ker f + \operatorname{Im} f & (2) & \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \\ (3) & \ker f = \ker f^2 & (4) & E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f \end{array}$$

Exercice 29 *Soit E de dimension n, f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. On pose $h = g \circ f$.*

1. *Quelles inclusions peut-on déduire des hypothèses sur les noyaux et les images de f, g et h ?*
2. *Montrer que f, g et h ont même rang.*
3. *Prouver que $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} g$.*

Exercice 30 *Soit E de dimension n, f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g \circ f = g$ et $g \circ f \circ g = f$.*

1. *Comparer* $\ker f$ *et* $\ker g$*.*
2. *Montrer que $f, g, f \circ g$ et $g \circ f$ ont même rang.*

Exercice 31 *Soit $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{n+1}$, $n+1$ éléments distincts deux à deux de $\mathbb{K}$. On définit l'application $\varphi : K_n[X] \longrightarrow K^{n+1}$ par $\varphi(P) = (P(\alpha_1), P(\alpha_2), \ldots, P(\alpha_{n+1}))$.*

1. *Montrer que φ est un isomorphisme d'espace vectoriel.*
2. *En déduire, β_1, β_2, ... β_{n+1} étant $n+1$ scalaires quelconques, qu'il existe un et un seul polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que : $\forall i \in \{1, \ldots, n+1\}$, $P(\alpha_i) = \beta_i$* (polynôme d'interpolation de Lagrange).
3. *On définit la famille $\mathcal{B} = (L_1, L_2, \ldots, L_{n+1})$ de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ par :*

$$L_k = \frac{\prod_{i=1}^{n+1}(X - \alpha_i)}{X - \alpha_k} = \prod_{i=1, i\neq k}^{n+1} (X - \alpha_i)$$

   Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
   Calculer les coordonnées sur cette base $\mathcal{B}$ du polynôme P de la question précédente.

4. *Application : trouver un polynôme P vérifiant $P(1) = -1$, $P(2) = -1$ et $P(3) = 1$.*

Exercice 32 *Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$, et $a \in \mathbb{K}$. Pour tout $P \in E$, on pose*

$$\varphi(P) = P(X) - \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X - a)^k.$$

1. *Vérifier que φ est un endomorphisme de E.*
2. *En utilisant la base $\mathcal{C} = (1, X - a, (X - a)^2, \ldots, (X - a)^n)$, déterminer φ.*
3. *En déduire la formule de Taylor pour les polynômes.*
4. *En déduire, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $h \in \mathbb{K}$ et $P \in K_n[X]$*

$$P(\alpha + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} h^k.$$

Exercice 33 *Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = Id_E$.*

1. *Montrer que* $\operatorname{Im}(f - Id) \subset \ker\left(f^2 + f + Id_E\right)$.

2. *Montrer que* $E = \operatorname{Im}(f - Id) \oplus \ker(f - Id)$.

Exercice 34

1. *Donner un exemple d'endomorphisme de* $\mathbb{K}^4$ *dont l'image est égale au noyau.*
2. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie* n *et* $u \in \mathcal{L}(E)$. *Montrer que si* n *est impair alors* $\operatorname{Im} u \neq \ker u$. *On suppose alors* n *pair, montrer que*
$$\ker u = \operatorname{Im} u \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} u \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)} \\ \operatorname{rg}(u) = \dfrac{n}{2} \end{array} \right.$$
3. *Montrer que si* $\ker u = \operatorname{Im} u$, *il existe des vecteurs* $(e_1, \cdots, e_r)$ *où* $r = \operatorname{rg} u$ *tels que* $(e_1, \cdots, e_r, u(e_1), \cdots, u(e_r))$ *soit une base de* E.

Exercice 35 *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels de dimension finis et* $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$.

1. *Montrer que* $\operatorname{rg}(f+g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$ *puis que* $|\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g| \leq \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$.
2. *Montrer que* $\operatorname{rg}(f+g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$ *si et seulement si* $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \left\{ \overrightarrow{0}_F \right\}$ *et* $\ker f + \ker g = E$.

Exercice 36 *Soit* E *un* K *espace vectoriel de dimension* n *et* $f \in \mathcal{L}(E)$ *de rang* 1, *montrer qu'il existe* $\lambda \in K$ *tel que* $f \circ f = \lambda f$.