Inégalités dans $\mathbb{R}$ - Valeur absolue

Exercice 1 *Soient x, y, z trois réels tels que $0 < a \leq x \leq b$, $d \leq y \leq c < 0$ et $e \leq z \leq f < 0$.*
Donner un encadrement de ① $3x - 4y$,② $x \times y$, ③ $\dfrac{x-y}{2z}$.

Exercice 2 *Montrer que $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 + xy + y^2 \geq 0$ (indication : $x^2 + xy$ est le début d'un carré ....)*

Exercice 3 *Montrer que $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (indication : $a^2 - ab - ac$ est le début d'un carré ...).*
Retrouver le résultat en développant $(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj)$ où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Exercice 4 *Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $2^{n-1} \leq n! \leq n^{n-1}$.*

Exercice 5 *Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer le maximum de $f(x) = x(2n - x)$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(2n)! \leq 2n^{2n}$.*

Exercice 6 *Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} \leq 1$.*

Exercice 7 *Montrer que pour $x \in [0, 1]$, on a $0 \leq x(1 - x) \leq \dfrac{1}{4}$. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k (1 - x)^k \leq \frac{4}{3}$.*

Exercice 8 *Soient x et y des réels, montrer que :*

1. $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$
2. $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$

Exercice 9 *Montrer que $(n!)^2 = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k(n - k + 1)$. En déduire que si $n \geq 1$, on a $\sqrt{n} \leq \sqrt[n]{n!} \leq \dfrac{n+1}{2}$*

Exercice 10 *Soit n un entier supérieur ou égal à 3.*

1. *Montrer que $\forall k \in \{2, ..., n\}$, $\dfrac{1}{k!} \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}$*
2. *En déduire que $\forall k \in \{2, ..., n\}$, $\dfrac{\binom{n}{k}}{n^k} \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}$.*
3. *Etablir alors que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leq 3$.*

Exercice 11 *Montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leq \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$. En déduire que $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}$ est majoré par 1.*

Exercice 12 *Inégalité de Cauchy-Schwarz (CS)*
On désire prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n \in \mathbb{R}$, $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$.
On définit $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $T(\lambda) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + y_i)^2$.

1. *Montrer que T est, en général, un polynôme du second degré.*
2. *Après avoir justifié que T garde un signe constant, en déduire l'inégalité de CS. Discuter le cas d'égalité.*
3. *Applications:*

(a) *Pour toute famille* $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ *de* n *nombres réels strictement positifs, montrer que*

$$(a_1+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geq n^2$$

(b) *Montrer que* $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i^2\geq\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2$

puis que si $\forall a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}_+$ *sont positifs alors* $\displaystyle\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i}\geq\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^n\sqrt{a_i}\right)$ *et en déduire que* $\forall x>1$, $\sqrt{x^{2n}-1}\geq\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\,\dfrac{x^n-1}{\sqrt{n}}$ *(faire* $a_i=x^{2i}$ *).*

Généralités sur les fonctions

Exercice 13 *Soit* $f(x)=\dfrac{e^{5x}+e^{-x}}{e^{4x}-1}$, *étudier la parité de* f *(rappel* $\dfrac{1}{e^{\alpha x}}=\cdots$*).*

Exercice 14 *Soit* $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$, *calculer* $f(x)+f(-x)$, *que peut on en déduire ?*

Exercice 15 *Soit* f *définie par* $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. *Déterminer le domaine de définition de* f, *étudier sa parité.*

Exercice 16 *Soit* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=x(1-x)$, *montrer que le graphe de* f *est symétrique par rapport à la droite* $\mathcal{D}:x=\frac{1}{2}$.

Exercice 17 *Soit* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)x(1-x)$, *montrer que le graphe de* f *est symétrique par rapport au point* $\Omega:\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

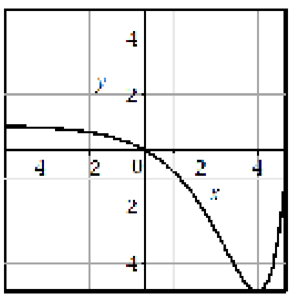
Exercice 18 *Déterminer une période positive (celle qui vous semble la plus petite) de* f *lorsque :*

1. $f(x)=\sin(x)\cos(x)-\sin(x)\cos^3(x)$.
2. $f(x)=\sin(6x)+\tan(3x)$.
3. $f(x)=\sin(x)+\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$. *Justifier que* $|f(x)|\leq 2$. *Peut-on affirmer que* $M=2$ *est un maximum de* f *?*

Exercice 19 *Tracer le graphe la fonction* $x\longmapsto\sqrt{x}$ *sur* $[0,+\infty[$, *puis donner rapidement le graphe de*

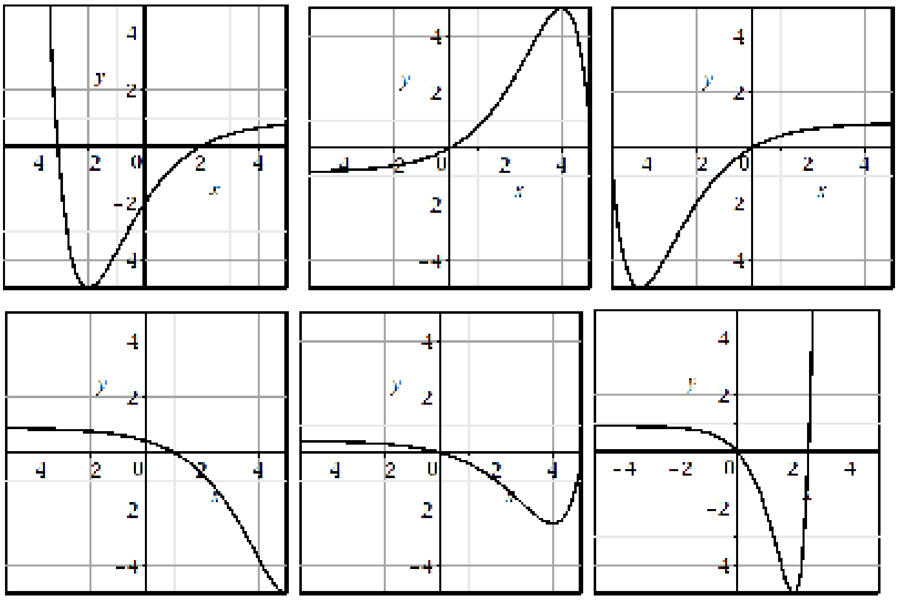
$$x\longmapsto\sqrt{-x},\ x\longmapsto\sqrt{x}+1,\ x\longmapsto\sqrt{x+1},\ x\longmapsto\sqrt{1-x},\ x\longmapsto 2\sqrt{x}\text{ et }x\longmapsto\sqrt{3x}$$

Exercice 20 *Soit* f *définie sur* $\mathbb{R}$, *on donne son graphe sur* $[-4,4]$ *:*



Préciser parmi les six graphes suivants, celui de :

$$①\ x \longmapsto f(-x)\,,\ ②\ x \longmapsto \frac{f(x)}{2},\ ③\ x \longmapsto -f(x)\,,\ ④\ x \longmapsto f(x-1)\,,\ ⑤\ x \longmapsto f(2-x)\,,\ ⑥\ x \longmapsto f(2x)$$



Exercice 21 *"Soit f impaire, 2π périodique telle que $f(x) = x$ si $x \in [0, \pi]$", cette affirmation permet-elle de définir f sur $\mathbb{R}$?*

Exercice 22 *Soit f paire, 4 périodique telle que $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ si $x \in [0, 2]$. Justifier que f est bien définie. Tracer son graphe, calculer $f(3)\,,\ f(2\pi)\,,\ f(2013)\,,\ f(n!)$ pour $n \in \mathbb{N}$.*

★**Exercice 23** *Soit f périodique,dérivable sur $\mathbb{R}$, justifier que f' est également périodique. Si T est une période de f', est-ce également une période de f ? En d'autres termes, lorsque l'on dérive, peut-on obtenir une période plus petite. On admettra qu'une fonction continue et périodique est bornée.*

★**Exercice 24** *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ayant deux centres de symétries distincts. Montrer que f est la somme d'une fonction périodique et d'une fonction linéaire.*

★**Exercice 25** *La fonction f vérifie $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x+3)\, f(x-3)$. Montrer que f est périodique.*

Exercice 26 *Montrer que f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x) + \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ n'est pas périodique.*

Exercice 27 *Déterminer toutes les fonctions à la fois monotones et périodiques.*

Exercice 28 *Soit f une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f \circ f = Id_{\mathbb{R}}$ (i.e. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(f(x)) = x$). Montrer que $f = Id_{\mathbb{R}}$ (i.e. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$).*

Exercice 29 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on suppose que $f \circ f$ est croissante et que $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.*

Exercice 30 *Trouver toutes les applications f définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telles que*

①	$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)\, f\left(x^2-1\right) = \sin(x)\,.$	②	$\forall x \in \mathbb{R},\ xf(x) + f(1-x) = x^3 + 1.$
③	$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \lvert f(x) + f(y)\rvert = \lvert x + y\rvert.$	④	$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)\, f(y) - f(xy) = x + y.$

Dérivée, variations des fonctions

Exercice 31 *Quel est le point d'intersection de la tangente en M d'abscisse a au graphe de la fonction exponentielle et l'axe Ox ?*

Exercice 32 *Montrer que le graphe de la fonction exponentielle est toujours au dessus sa tangente à l'origine.*

Exercice 33 *Soit f définie par $f(x) = \ln x$.*

1. *Quel est le domaine de définition de f ? Donner l'équation de la tangente T_a au point d'abscisse a.*
2. *Soit $g(a)$ l'abscisse du point d'intersection de T_a et de l'axe Ox. Préciser g, tracer le graphe de g.*
3. *Dans quel ensemble doit-on choisir α pour qu'il passe par le point $M(\alpha, 0)$ deux tangentes à $\mathcal{C}_f$?*

Exercice 34 *Pour $m \in \mathbb{R}$, on définit $f_m(x) = \dfrac{x+m}{x^2+1}$. On note $\mathcal{C}_m$ la courbe représentative de f_m.*

1. *Montrer que les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse $x = 0$ sont parallèles.*
2. *Montrer que les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse $x = 1$ sont concourantes.*

Exercice 35 *Soit f définie sur I, deux fois dérivable telle que $f'' \geq 0$ sur I.*

1. *Soit $y = T_a(x)$ l'équation de la tangente à f au point d'abscisse a, donner l'expression de $T_a(x)$.*
2. *On pose $g(x) = f(x) - T_a(x)$, représenter $g(x)$ sur un schéma. Etudier les variations de g (il peut être judicieux de dériver dex fois).*
3. *En déduire que le graphe de f est au dessus de ses tangentes (on dit que f est convexe sur I).*

Exercice 36 *Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1+\sin(2x)+2\cos(x)$. Montrer que le graphe de f admet un centre de symétrie. Etudier les variations de f sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ (pourquoi cet intervalle ?).*

Exercice 37 *Soit f définie pour $x \neq -1$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$, montrer que f admet un centre de symétrie. Etudier les variations de f sur son domaine de définition. Déterminer les x tels que $-1 \leq f(x) \leq 2$.*

Exercice 38 *Soit f définie par $f(x) = \ln(x-1) + \ln(5-x)$. Déterminer D_f, montrer que le graphe admet un axe de symétrie. Etudier les variations de f.*

★**Exercice 39** *Soit f définie par $f(x) = \tan(x)\exp\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sin x}\right)$. Déterminer D_f, étudier la périodicité de f. Calculer $f(\pi - x)$, en déduire l'existence d'un centre de symétrie. Etudier les variations de f (sur l'intervalle d'étude le plus petit possible, on ne demande pas les limites aux bords). Déterminer le minimum de f sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.*

Exercice 40 *Tracer le graphe de f définie par $f(x) = |x-1| + 2|x+2|$. Résoudre, graphiquement, $f(x) = 5$, $f(x) \geq 6$.*

Exercice 41 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n(x) = (1+e^x)^n$. A l'aide du binôme, donner deux expressions de f_n'. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$. Comment procéder pour obtenir $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$?*

Exercice 42 *Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $f(x) = \operatorname{Re}\left(\dfrac{(1-i)(1+xi)}{x+i}\right)$. Donner, à l'aide du graphe de f, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$ où $a \in \mathbb{R}$ est fixé. Préciser $f^{-1}\left(\left[-\sqrt{2}, 1\right]\right)$ et $f(]-\infty, 0])$.*

Exercice 43 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dérivable telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) \leq f(x)$.*

1. *Etudier les variations de $g : x \longmapsto e^{-x} f(x)$.*
2. *En déduire f.*

Exercice 44 *Montrer que* $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$ *(dériver deux fois ...).*

Exercice 45 *On sait que* $\forall x \geq 0$, $\sin(x) \leq x$.

1. *Montrer que* $\forall x \geq 0$, $1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos(x)$ *puis que* $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin(x)$.
2. *On définit, pour* $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$. *Donner un encadrement de* u_n. *En déduire que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge et préciser sa limite.*

Exercice 46 *A l'aide d'une étude de fonctions, préciser le nombre de solutions de l'équation* $\dfrac{\ln x}{x} = m$ *où* m *est un paramétre. Résoudre l'équation pour* $m = \ln\sqrt{2}$.

Exercice 47 *Soit* $a > 0$, *montrer qu'il existe une unique fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

① f *est continue, impaire, périodique de période* $2a$.
② *Si* $x \in [0, a]$ *alors* $f(x) = 4\ln(1+x) - ax$.

Donner une valeur approchée de a *et tracer le graphe de* f. *(On donne* $4\ln(3) - 4 = 0,39$ *et* $4\ln(3,2) - (2,2)^2 = -0,18$*).*

IAF et applications

Exercice 48 *A l'aide des accroissements finis appliqués à* $f(x) = \sqrt{x}$ *sur* $[100, 107]$, *donner un encadrement de* $\sqrt{107}$.

Exercice 49 *A l'aide des accroissements finis, montrer que :*

1. $\forall x \in]0, +\infty[$, $\dfrac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$, *en déduire que l'inégalité est encore vraie sur* $]-1, +\infty[$.
2. $\forall x > 0$, $\dfrac{x}{1+x^2} < \arctan(x) < x$.

Exercice 50 *On souhaite déterminer la limite de*

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

1. *Montrer que* $\forall x > 0$, $\dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \dfrac{1}{x}$.
2. *En déduire un encadrement de* $\dfrac{1}{x}$ *pour* $x > 1$.
3. *En déduire la limite quand* n *tend vers* $+\infty$ *de* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

Exercice 51 *On considère la suite* $(u_n)_n$ *définie par* $u_0 \in \left[0, \dfrac{4}{3}\right]$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(4 - u_n^2\right)$. *On pose* $f(x) = \dfrac{1}{3}\left(4 - x^2\right)$.

1. *Justifier rapidement que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$.
2. *Résoudre l'équation* $f(x) = x$.
3. *Montrer que* f *est lipschitzienne sur* $\left[0, \dfrac{4}{3}\right]$.
4. *Montrer que* $(u_n)_n$ *converge et préciser sa limite.*

Exercice 52 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $u_0 > 0$ *et* $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n^2}$.

1. *Soit f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, montrer que sur $[0,+\infty[$ la fonction $|f'|$ admet un maximum dont on précisera la valeur. Que peut-on en déduire pour f ?*
2. *Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution ℓ positive.*
3. *En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exercice 53 *On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 1 + \cos\left(\dfrac{u_n}{3}\right)$. On pose $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{3}\right) + 1$.*

1. *Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α. Préciser $\lfloor \alpha \rfloor$.*
2. *Montrer que sur $\mathbb{R}$ la fonction $|f'|$ admet un maximum dont on précisera la valeur. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{3^n}$. A partir de quel rang est-on est sûr que u_n est une valeur approchée de α à 10^{-5} près ?*

Exercice 54 *Montrer que l'équation $x^3 + 4x - 1 = 0$ admet une unique solution réelle. Proposer une méthode, basée sur l'IAF, pour la calculer avec une erreur inférieure à 10^{-3}.*