Arbre de probabilité (Afrique)

Univers - Evénement

Exercice 1 *Donner l'univers Ω de l'expérience aléatoire consistant à tirer deux boules simultanément d'une urne qui en contient* 10 *numérotés puis à lancer successivement quatre fois un dés à 6 faces. Donner un exemple d'issue possible, déterminer le cardinal de Ω. Décrire les événements A : "On obtient des numéros de boules inférieurs à* 4" *et B : " Aucun lancé ne donne un* 6" *et C : "A et B sont réalisés". En supposant chaque issue équiprobable, donner les probabilité de A, B et $A \cap B$.*

Exercice 2 *On considère six urnes numérotées de* 1 *à* 6 *contenant chacune au moins une boule blanche et une boule noire. On lance un dé et on pioche successivement et avec remise* 8 *boules dans l'urne dont le numéro est le résultat du lancer. On définit alors les événements suivants :*
N_0 : *"On ne pioche que des boules blanches".*
N : *"On ne pioche que des boules noires".*
B_k : *"Le k-ième tirage dans l'urne a donné une boule blanche"*
N_k : *"On a tiré la première boule noire au k-ième tirage"*
A_i : *"On a tiré les boules dans l'urne numéro i"*
Les familles suivantes forment-elles des systèmes complets ?

① (N, N_0) ② $(B_k)_{1\leq k\leq 8}$ ③ $(N_k)_{1\leq k\leq 8}$ ④ $(N_k)_{0\leq k\leq 8}$ ⑤ $(A_i)_{1\leq i\leq 6}$

Exercice 3 *Soit A, B et C trois événements, exprimer en fonction de A, B, C les événements*

1. A_1 : *"L'un des trois événements se réalise".*
2. A_2 : *"Un seul des trois événements se réalise".*
3. A_3 : *"Deux, au moins se réalisent".*
4. A_4 : *"Deux exactement se réalisent".*
5. A_5 : *"Aucun ne se réalise"*
6. A_6 : *"Deux au plus se réalisent"*

Construction d'une probabilité

Exercice 4 *Déterminer une probabilité p sur $\Omega = [[1, n]]$ telle que $p(\{k\})$ soit proportionnelle à k.*

Exercice 5 *Soit (Ω, p) un espace probabilisé fini, A et B deux événements de probabilité $\frac{3}{5}$. Donner un encadrement de $p(A \cap B)$.*

Exercice 6 *Soit $\Omega = \{a, b, c\}$, donner une condition nécessaire et suffisante sur x et y pour qu'il existe une probabilité p sur Ω telle que $p(\{a, b\}) = x$ et $p(\{b, c\}) = y$.*

Espaces probabilisés finis

Exercice 7 *En HX_4,* 20% *des étudiants font de la pétanque,* 50% *de la natation et* 15% *les deux (mais pas au même endroit). On prend un étudiant au hasard, quelle est la probabilité qu'il pratique un des deux sports (si toutefois, nager est un sport).*

Exercice 8 *Un magasin possède deux caisses. La caisse* 1 *est ouverte avec une probabilité de $\dfrac{5}{8}$ et la caisse* 2 *avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$. Quelle est la probabilité que les deux caisses soient ouvertes ?*

Exercice 9 *Soit (Ω, p) un espace probabilisé, A et B deux événements, on définit $C =$ "soit A, soit B se réalise mais pas les deux". Exprimer la probabilité de C.*

Exercice 10 *Dans un magasin Herménégilde veut acheter des fricadelles et de la mayonnaise sachant que l'on y trouve les premières 3 jours sur 7 et la seconde 1 jour sur 3 et les deux ensembles* 1 *jour sur* 7*. Quelle est la probabilité qu'il fasse choux blanc ? Et celle où il ne trouve que l'un des deux, mais pas l'autre ?*

Probabilité uniforme

Exercice 11 *On lance 6 dés à 6 faces, quelle est la probabilité que toutes les faces donnent un chiffre différent.*

Exercice 12 *Un exemple de jeu non transitif (idéal pour les familles de trois enfants, pas de vainqueur mais pugilat assuré). M. Di a trois enfants, Alain, Amar et Sam. Pour les corvées, chaque enfant dispose d'une urne dans laquelle il pioche un numéro. L'urne d'Alain contient les numéros* $\{2,4,9\}$ *, celle d'Amar les numéro* $\{1,6,8\}$ *et celle de Sam* $\{3,5,7\}$*. Une partie oppose deux enfants, chacun puise dans son urne, celui qui a le plus grand numéro l'emporte (il n'est pas de corvée). Montrer que en probabilités Alain l'emporte sur Amar, qui est n'est pas amer puisqu'il l'emporte sur Sam, ce dernier l'emportant sur Alain. Quid d'une joute à trois ?*

Exercice 13 *Chaque semaine une loterie est organisée. Sur les 100 tickets mis en vente, 10 sont gagnants. Chaque billet coûte* 1 *euro, Auxence a* 7 *euros.*

1. *Quelle est, d'après vous la meilleure stratégie : ① Acheter un billet chaque semaine" ou ② Acheter sept billets la première semaine ?*
2. *Si Auxence dispose de* $n \in [[1,10]]$ *euros, quelle est la meilleure stratégie ? (utiliser une calculette).*

Exercice 14 *Hybernice est toujours pressée le matin, dans son tiroir sont rangées dix paires de chaussettes. Elle choisit au hasard* 4 *chaussettes, quelle est la probabilité :*
① *D'obtenir deux paires de chaussettes.*
② *D'obtenir au moins une paire de chaussettes ?*
③ *D'obtenir une et une seule paire de chaussettes ?*

Exercice 15 *Une urne contient* $2n+1$ *boules numérotées de* 1 *à* $2n+1$*. On tire deux boules de cette urne. Calculer la probabilité d'obtenir des numéros de la même parité dans les différents cas suivants :*
① *On tire deux boules simultanément.*
② *On tire une boule, on la remet, puis on tire la seconde.*

Exercice 16 *Dans une classe de n personnes, quelle est la probabilité que deux d'entre elles aient le même jour d'anniversaire ? La calculer pour l'effectif standard en* HX_4 *: 46 (45 étudiants + 1 prof).*

Exercice 17 *Soit* E *un ensemble de cardinal* $n > 0$*, on choisit au hasard deux sous-ensembles* A *et* B*, déterminer la probabilité que :*
① $A \cup B$ *soit un événement élémentaire.*
② A *et* B *forment un système complet d'événements.*
③ $A \cap B$ *soit un événement élémentaire.*
④ $A \cup B = E$.
⑤ $A \subset B$.

Exercice 18 *Un exemple de marche aléatoire.*
Une puce se déplace sur l'axe des entiers relatifs (sincèrement qui peut croire cela ? ce doit être une puce savante). Elle se trouve initialement en 0*, et se met à sauter. Si elle est à l'abscisse* k*, elle saute à l'abscisse* $k+1$ *ou* $k-1$ *de manière équiprobable.*

1. *Quelle est la probabilité qu'elle se retrouve à son point de départ après* 16 *sauts ? Après* 17 *sauts ?*
2. *Quelle est la probabilité qu'elle se trouve à l'abscisse* k *après* 16 *sauts, où* $k \in [[-16,16]]$.
3. *Même questions si la puce saute en* $k+1, k-1$ *ou reste à sa place de manière équiprobable.*

Indication : On codera le déplacement comme une suite de $+1$ *et de* -1*. Par exemple, le déplacement suivant (on note les abscisses)* $0 \to 1 \to 2 \to 1 \to 2$ *est codé* $(1,1,-1,1)$ *et la position de la puce est* $+1+1-1+1=2$.

Probabilités totales, cas simple

Exercice 19 *Une urne contient n boules numérotées de* 1 *à* n*. Pour* $r \in [[2,n]]$ *, on tire, avec remise r boules. On considère l'événement* $E_r =$ *"Le numéro de la boule tirée au r-ième tirage a un numéro plus grand que les précédents".*

1. *Calculer la probabilité de E_r.*
2. *Pour $r = 2$, l'exprimer en fonction de n.*
3. *Calculer sa limite si n tend vers l'infini.*

Formule des probabilités composées

Exercice 20 *Une urne contient n boules blanches et une noire. On tire, sans remise, n boules. Quelle est la probabilité d'avoir, au k − ième tirage, que des boules blanches ?*

Exercice 21 *A l'arrêt du bus, 10 garçons et 15 filles descendent (bon des ados, donc de manière désordonnées). Quelle est la probabilité que les trois premiers à sortir soient des garçons et la quatrième une fille ?*

Exercice 22 *Une urne contient $2n$ boules dont n noires et n blanches. On tire, sans remise, n boules. On note A_i l'événement " au i − ième tirage, on a tiré une boule noire".*

1. *Quelle est la probabilité de n'avoir que des noires ?*
2. *Et de n'en tirer qu'une ?*

Exercice 23 *Il fait noir, le pub vient de fermer et Andy Capp doit rentrer chez lui. Son trousseau comporte n clefs, dont une et une seule ouvre la porte derrière laquelle l'attend Florrie, son épouse. Il essaie donc les clefs au hasard mais les unes après les autres. Pour $k \in [[1, n]]$, quelle est la probabilité que la porte s'ouvre à la $k_{ième}$ tentative ?*

Smythe showed his world warts and all.
© Mirrorpix (MGN Ltd).

Conditionnement

Exercice 24 *Votre médecin vous annonce que votre test de dépistage du cancer est positif. Pas de chance, car ce cancer ne touche que 0,1 % de la population ! Vous cherchez alors à savoir si ce test est fiable. La réponse est sans appel : « Si vous avez le cancer, le test sera positif dans 90% des cas ; alors que si vous ne l'avez pas, il sera négatif dans 97% des cas ». Que devez-vous en penser ?*

Exercice 25 *Trois urnes contiennent des boules noires et blanches selon la répartition*

Urne	$\mathcal{U}_1$	$\mathcal{U}_2$	$\mathcal{U}_3$
Boules blanches	*2*	*6*	*4*
Boules noires	*3*	*9*	*1*

On choisit une urne au hasard et on y pioche une boule. Donner la probabilité d'avoir une boule blanche.

Exercice 26 *On dispose de deux pièces, l'une équilibrée, l'autre truquée amenant Pile avec une probabilité de $\dfrac{2}{3}$. On choisit au hasard une pièce et on la lance.*

1. *Quelle est la probabilité d'amener Pile.*
2. *On a obtenu Pile, quelle est la probabilité d'avoir utilisé la pièce truquée ?*
3. *On modifie le jeu ainsi : ① La pièce truquée amène pile avec une probabilité de p. ② Au lieu de choisir au hasard une des deux pièces, on choisit avec la pièce truquée avec la probabilité de p (ce qui revient à lancer la pièce truquée et à rejouer celle-ci si on amène pile).*

   Que doit valoir p pour que, ayant obtenu pile , la proba d'avoir utilisé la pièce truquée soit égale à $\dfrac{2}{3}$?

Exercice 27 *Dans une usine on fabrique des téléphones sur trois machines M_1, M_2 et M_3. Ces machines produisent, respectivement, 50%, 30% et 20% des téléphones fabriqués. On estime que parmi les téléphones fabriqués, 2%, 3% et 5% de ceux fabriqués par M_1, M_2 et M_3 respectivement sont défectueux.*

1. *On prend un téléphone au hasard, quelle est la probabilité qu'il soit défectueux ?*

2. *Quelle est la probabilité d'obtenir un téléphone défectueux et provenant de M_1. Les événements "le téléphone est défectueux" et "Le téléphone provient de M_1" sont-ils indépendants ?*
3. *Mon téléphone est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne de la machine 1 ?*

Exercice 28 *Une compagnie d'assurance a classé ses clients en trois catégories par âge. Le tableau suivant indique les proportion et la probabilité d'avoir au moins un sinistre dans l'année en fonction de la catégorie.*

Catégorie	$A =$ " < 25 *ans*"	$B =$ "*entre* 25 *et* 50 *ans*"	$C =$ " > 50 *ans*"
Proportion	*25 %*	*53 %*	*22 %*
Probabilité de sinistre / an	*0,12*	*0,06*	*0,09*

1. *Un assuré est choisi au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait déclaré au moins un sinistre dans l'année.*
2. *Quelle est la probabilité qu'un assuré ayant déclaré au moins un sinistre dans l'année ait moins de 25 ans ?*
3. *Quelle est la probabilité qu'un assuré ayant plus de 25 ans ait déclaré au moins un sinistre ?*
4. *Quelle est la probabilité qu'un assuré n'ayant pas de sinistre dans l'année soit âgé de plus de 25 ans ?*

Exercice 29 *On dispose de deux dés A et B dont les faces sont soit rouges, soit blanches. Le dé A a quatre faces rouges et le dé B quatre blanches. On lance un dé équilibré à six faces. Si le résultat est 1 ou 6, on ne joue ensuite qu'avec le dé A, sinon on ne joue qu'avec le dé B. On lance ensuite le dé sélectionné un certain nombre de fois.*

1. *Quelle est la probabilité d'obtenir "rouge" au premier jeu.*
2. *On a obtenu rouge aux deux premiers jeux. Quelle est la probabilité d'avoir rouge au troisième jeu ?*
3. *On a obtenu rouge aux n premiers jeux. Calculer la probabilité d'avoir utilisé le dé A.*

Exercice 30 *Contamination ! Lors d'une épidémie, 35 % des animaux sont atteints par la maladie M. On met au point un test de dépistage. La probabilité qu'un animal atteint ait une réaction positive vaut $0,9$. La probabilité qu'un animal non atteint ait une réaction négative vaut $0,8$.*

1. *Quelle est la probabilité qu'un animal ayant eu un test positif soit malade ?*
2. *Sur un animal donné, on effectue le test qui s'avère négatif. On effectue, sur le même animal un second test, indépendant du précédent pour la maladie. Ce second test est positif. Quelle est la probabilité que l'animal soit malade ?*
3. *A partir de quelle proportion d'animaux malades dans l'élevage, la probabilité trouvée à la question précédente est-elle supérieure à $0,5$?*

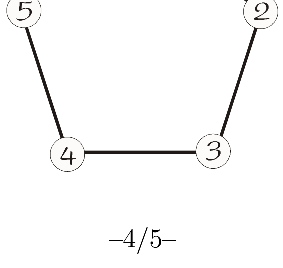
Exercice 31 *Une mouche se déplace aléatoirement sur les sommets d'un triangle ABC avec la règle suivante : si, à l'instant n, elle est sur un des trois sommets, alors à l'instant $n+1$ elle y reste avec une probabilité de $\dfrac{2}{3}$, ou elle se déplace sur l'un des deux autres sommets et cela avec la même probabilité pour chacun de ces deux sommets.*
A l'instant 0, la mouche se trouve en A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les événements A_n (respectivement B_n et C_n) :

" la mouche se trouve en A (respectivement B et C) à l'instant n "

et les probabiliés $a_n = p(A_n)$, $b_n = p(B_n)$ et $c_n = p(C_n)$.

1. *Que vaut $a_n + b_n + c_n$? Exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.*
2. *On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, déterminer $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$. Préciser X_0.*
3. *Donner une expression de a_n, b_n et c_n. Lorsque n tend vers l'infini, où la mouche a-t-elle le plus de chance de se trouver ?*

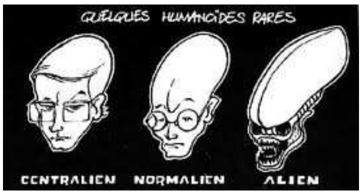
Exercice 32 *Athaulf et Récarède ont rendez-vous dans un complexe formé de cinq sites reliés entre eux par le schéma suivant.*



Au départ Athaulf est sur le site 1, alors que Récarède est sur le site 2. Ils décident de partir à la recherche de l'autre selon le schéma suivant.
A partir d'un site donné, chacun choisit d'aller sur un des deux sites voisins de manière équiprobable. Les déplacements sont simultanés et indépendants les uns des autres. Ils se déplacent jusqu'à ce qu'ils se retouvent puis restent ensembles. On convient que les deux amis ne peuvent pas se retrouver lors d'un déplacement.
On note A_n=" Athaulf et Récarède sont sur le même site après n déplacements", B_n = "Athaulf et Récarède sont sur des sites adjacents après n déplacements" et C_n = "Athaulf et Récarède sont à deux routes après n déplacements". On pose $a_n = p(A_n)$, $b_n = p(B_n)$ et $c_n = p(C_n)$.

1. *Justifier que (A_n, B_n, C_n) est un système complet pour $n \geq 2$. et que pour $n \geq 0$, $\left\{\begin{array}{l} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{array}\right.$. Préciser les valeurs de a_0, b_0 et c_0.*
2. *Déterminer les limites des trois suites, conclusion ?*

Exercice 33



On désire calculer la probabilité d'existence d'aliens. On sait qu'il y a, sur terre, n individus (de l'ordre de 7×10^9) et on note N le nombre maximum de personne, i.e d'être pensants, dans l'univers (en comptant les Gungans ...).
On note A_k ="Il y a k personnes dans l'univers" pour $n \leq k \leq N$. On suppose que les $(A_k)_{n\leq k\leq N}$ sont équiprobables. On choisit alors n personnes au hasard dans l'univers.

1. *Sachant qu'il y a k personnes dans l'univers, quelle est la probabilité de choisir les n terriens ?*
2. *Déterminer la probabilités que nous sommes seuls dans l'univers sachant que l'on a choisit les n terriens ?*
3. *Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{\binom{k}{n}} = \frac{n}{n-1} - \frac{1}{\binom{N+1}{n}}\frac{N+1}{n-1}$, en déduire que $p_B(A_n) \geq \dfrac{n-1}{n}$ où B = "On a choisit les n terriens".*
4. *Qu'en pensez-vous ?*

Indépendance ($2^2/2^3-1$)

Exercice 34 *Soit $\Omega = \{1,2,3,4\}$, muni de la probabilité uniforme P. On considère les événements : $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$ et $C = \{2,3\}$.*
Vérifier que A, B et C sont deux à deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.

Exercice 35 *Une urne contient 13 boules : 6 noires, 3 blanches et 4 rouges. On tire simultanément 4 boules de l'urne, et on note les événements A ="on obtient exactement 2 boules blanches", B ="on obtient 2 boules rouges". Calculer $p(A)$ puis $p(B)$. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Que vaut $p_B(A)$?*

Exercice 36 *On lance n pièces de monnaie équilibrées ($n \geq 2$), et on considère les événements :*
① *A = "toutes les pièces tombent du même côté."*
② *B = "au plus une pièce affiche Face."*

1. *Calculer $p(A)$ et $p(B)$.*
2. *Calculer $p(A \cap B)$.*
3. *Donner l'unique valeur de n pour laquelle A et B sont indépendants.*