Variables aléatoires - Loi d'une v.a- Lois usuelles

Exercice 1 *Une urne contient n boules, une seule est noire, les autres sont blanches. On tire, sans remise les n boules. On note X la variable égale au numéro du tirage donnant la boule noire. Donner la loi de X.*

Exercice 2 *On choisit X un entier au hasard entre 1 et $2n$. Quelle est la loi de X, et celle de $Y = (-1)^X$?*

Exercice 3 *La loi de Newcomb-Benson dit que, lorsque l'on considère un nombre dans un document quelconque, la probabilité d'apparition du chiffre $k \in [[1,9]]$ en première position (à gauche donc non nul) est $p_k = \log\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$ (où $\log$ est le logarithme en base 10). Montrer que la variable X donnant ce premier chiffre, définit bien une variable aléatoire. Calculer son espérance.*

Exercice 4 *Soient $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$, X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [[1,ab]]$ et $p(X=k) = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}$ si $k \in [[1,ab]]$. Que doivent vérifier a et b pour que X soit une variable aléatoire ? Déterminer alors $E(X)$. Déterminer a et b pour que $E(X) = \dfrac{7}{2}$.*

Exercice 5 *On lance deux dés et on note X la variable aléatoire égale à la valeur absolue de la différence des deux dés. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.*

Exercice 6 *Pour améliorer la sûreté de fonctionnement d'un serveur informatique, on envisage d'introduire de la redondance. On utilise donc trois alimentations de 300 Watts chacune : le serveur peut continuer à fonctionner avec une alimentation en panne car il consomme au maximum 500 Watts. On place également les quatre disques durs en configuration RAID : le serveur peut continuer à fonctionner avec un disque dur en panne. On suppose que la probabilité de panne d'une alimentation est p et que celle d'une panne de disque dur est q . On suppose en outre que tous les composants sont indépendants.*

1. *Soit un serveur avec alimentations redondantes : calculer la probabilité de panne du serveur en supposant qu'aucun autre composant que les alimentations ne peut tomber en panne.*
2. *Soit un serveur avec disques durs RAID 5 : calculer la probabilité de panne du serveur en supposant qu'aucun autre composant que les disques dur ne peut tomber en panne.*
3. *On suppose $p = q$. On veut appliquer l'une des deux solutions, laquelle est la plus intéressante ?*

Exercice 7 *Une urne contient des boules numérotées de 1 à n. Il y a i boules portant le numéro i. On tire une boule, on note X son numéro. Quelle est la loi de X, son espérance, sa variance.*

Exercice 8 *Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire, successivement et sans remise deux boules. On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au plus grand (resp. petit) des numéros.*

1. *Donner les lois de X et Y.*
2. *Calculer $E(X)$. Comment peut-on calculer $E(Y)$?*

Exercice 9 *Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(6,p)$ et le polynôme $t^2 + Xt + X + 1$. Quelle est la probabilité que le polynôme Q ait une racine réelle ?*

Couple de v.a-Loi conditionnelle - v.a indépendantes

Exercice 10 *Soit* (X,Y) *un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par le tableau*

$Y \setminus X$	0	1	2
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
-1	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

1. *Justifier que l'énoncé est bien cohérent. Préciser les lois marginales de* X *et et* Y.
2. *Donner la loi de* $Z = XY$, *calculer son espérance.*
3. *Comparer* $P(X = 1 \text{ et } Y = 1)$, $P(X = 1)$ *et* $P(Y = 1)$. *Les variables aléatoires sont-elles indépendantes.*
4. *Montrer que* $E(Y) = 0$, *que peut-on en déduire ?*

Exercice 11 *Une urne contient une boule blanche, une verte et deux rouges. On tire successivement, sans remise, les quatre boules. On note* X *le rang d'apparition de la boule blanche et* Y *celui de la seconde boule rouge.*

1. *Donner la loi conjointe de* (X,Y).
2. *Préciser les lois marginales de* X *et de* Y. *Les variables sont-elles indépendantes ?*

Exercice 12 *Une urne contient* N *boules numérotées de* 1 *à* N. *On prélève successivement et avec remise* n *boules dans l'urne. On note* X *et* Y *les variables aléatoires égales respectivement au plus petit et au plus grand des numéros obtenus.*

1. *Pour* $x \in [[1,N]]$, *calculer* $p(X \geq x)$ *et en déduire la loi de* X.
2. *Pour* $y \in [[1,N]]$, *calculer* $p(Y \leq y)$ *et en déduire la loi de* Y.
3. *Pour* $(x,y) \in [[1,N]]^2$, *calculer* $p_{x,y} = p(X > x \text{ et } Y \leq y)$ *et en déduire la loi conjointe de* (X,Y)
4. *Mêmes questions si les trages ont lieu simultanément et sans remise.*

Exercice 13 *Un employé d'un centre d'appels effectue* n *appels téléphoniques vers* n *correspondants distincts dont chacun décroche avec une probabilité* p.
On note N_1 *le nombre de correspondants qui ont décroché. L'employé rappelle plus tard les* $n - N_1$ *autres correspondants. On note* N_2 *le nombre de correspondants qui décrochent lors de ce second appel, et* $N = N_1 + N_2$.

1. *Donner la loi de* N_1.
2. *Que représente* N *? Donner sa loi (on utilisera la loi conditionnelle de* N_2 *sachant* N_1*).*
3. *Que valent* $E(N_1)$, $E(N)$, $V(N_1)$ *et* $V(N)$ *?*

Exercice 14 *Une urne contient une boule rouge, une verte et* $N - 2$ *boules blanches (avec* $N \geq 3$*). On tire, successivement et sans remise toutes les boules. On note* X_1 *le rang d'apparition de la boule rouge et* X_2 *celui de la verte.*

1. *Donner les lois de* X_1 *et de* X_2. *Calculer leur espérance, leur variance. A-t-on* $X_1 = X_2$ *?*
2. *Donner la loi du couple* (X_1, X_2). *Les variables sont-elles indépendantes ?*
   Calculer leur covariance, définie par $Cov(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)$.
3. *Soit* X *le rang où l'on obtient une des deux boules verte ou rouge et* Y *celui où l'on a obtenu les deux. Déterminer les lois de* X *et de* Y *ainsi que leur espérance.*

Espérance-variance

Exercice 15 *On choisit un nombre au hasard entre* 1 *et* n *: on effectue* n *fois ces expériences, supposées toutes indépendantes l'une de l'autre, et on note* X *le nombre de numéros jamais tirés. On cherche l'espérance de* X.

1. *Pour* i *entre* 1 *et* n, *on note l'événement* $A_i = <<$ *le numéro* i *n'est jamais tiré*$>>$. *Calculer* $P(A_i)$.
2. *Justifier* $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}$, *puis calculer* $E(X)$.
3. *Donner un équivalent de* $E(X)$.

Exercice 16 *Soit* N *et* p *deux entiers naturels non nuls. Une urne contient* p *jetons numérotés de* 1 *à* p. *On tire, successivement, avec remise,* N *jetons dans l'urne. On définit, pour* $i \in [[1,p]]$ *les variable aléatoire suivantes :*
La variable F_i *donne le nombre de fois où le jeton* i *a été tiré. La variable* X_i *vaut* 1 *si le jeton* i *a été tiré au moins une fois,* 0 *sinon. On pose* $F = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$ *et* $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} X_i$.

1. *Préciser la loi de F_i, son espérance, sa variance.*
2. *Que dire de F, donner son espérance et sa variance.*
3. *La famille $(F_i)_{1\leq i\leq p}$ est-elle une famille de variable mutuellement indépendantes ?*
4. *Préciser la loi de X_i, son espérance, sa variance. La famille $(X_i)_{1\leq i\leq p}$ est-elle une famille de variable mutuellement indépendantes ? Donner l'espérance de X.*
5. *Application : Mon FAI possède un service après-vente. Les téléconseillers sont sur 30 sites. On suppose que ce service reçoit, en moyenne 100 appels par jour, indépendant les uns des autres et que chaque client est orienté vers l'un des sites de manière équiprobable. Le nombre de site vous-semble-t-il adapté ?*

Exercice 17 *Une urne contient des jetons numérotés de 1 à n. On tire au hasard avec remise, N numéros dans l'urne. On note X le plus grand des numéros tirés.*

1. *Déterminer la loi de X.*
2. *Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}E(X)$.*
3. *Calculer $\lim\limits_{N\to+\infty}E(X)$, qu'en pensez-vous ?*

Exercice 18 *Une urne contient $2n$ boules, dont n rouges et n blanches. On prélève, successivement et sans remise toutes les boules. On note X le numéro du tirage où l'on a obtenu toutes les boules rouges.*

1. *Déterminer la loi de X.*
2. *Montrer que pour $n\geq 0$ fixé et $0\leq N\leq n$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\binom{n+k}{n}=\frac{N+1}{n+1}\binom{n+N+1}{n}$.*
3. *Calculer l'espérance de X et sa variance.*

Exercice 19 *Une urne contient initialement 2 boules noires et 4 blanches. On fait 100 tirages successifs d'une boule. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne et on ajoute une boule supplémentaire de même couleur. Pour $n\in[[1,100]]$, on note X_n la variable aléatoire qui vaut 0 si la énième boule tirée et blanche et 1 sinon. On pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k$.*

1. *Que représente S_n ?*
2. *Déterminer la loi de X_1, son espérance, sa variance.*
3. *Calculer $P_{[X_1=0]}(X_2=0)$ et $P_{[X_1=1]}(X_2=0)$.*
4. *Déterminer la loi de X_2, son espérance et sa variance.*
5. *Soit n et k deux entiers tels que $0\leq k\leq n$, calculer $P_{[S_n=k]}(X_{n+1}=1)$.*
6. *On désigne désormais par n un entier naturel non nul. Montrer que $P(X_{n+1}=1)=\dfrac{2+E(S_n)}{6+n}$.*
7. *En déduire $P(X_{n+2}=1)=P(X_{n+1}=1)$.*
8. *Donner la loi de X_n, son espérance, sa variance. Calculer l'espérance de S_n.*

Exercice 20 *Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages avec remise d'une boule. On note X le numéro du tirage pour lequel on obtient pour la première fois une boule qui a déjà été tirée.*

1. *Déterminer $X(\Omega)$.*
2. *Calculer $P_{[X>i-1]}(X>i)$ et justifier que $P(X>k)=\displaystyle\prod_{i=2}^{k}P_{[X>i-1]}(X>i)$.*
3. *En déduire la loi de X.*

Exercice 21 *Une urne contient des jetons numérotées de 1 à n. On tire les jetons un à un avec remise jusqu'à l'obtention d'un numéro inférieur ou égal au précédent. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de jetons tirés.*

1. *Déterminer $X(\Omega)$.*
2. *Soit $k\in\mathbb{N}$ tel que $0\leq k\leq n$. Donner le nombre de tirage de k jetons tels que ces derniers soient dans l'ordre strictement croissant.*

3. *En déduire* $P(X > k)$ *puis déterminer la loi de* X.
4. *Soit* Y *une variable aléatoire à valeurs comprises entre* 0 *et* $p \in \mathbb{N}$, *montrer que* $E(Y) = \sum_{k=1}^{p} P(Y \geq k)$.
5. *Calculer* $E(X)$.

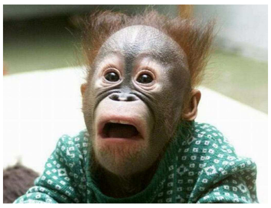
Exercice 22 *Marche aléatoire sur une droite (le retour de la puce).*
Une puce se déplace aléatoirement sur une droite d'origine O. *A chaque instant elle faut un saut d'une unité vers la droite avec une probabilité* $p \in [0,1]$ *et vers la gauche avec une probabilité* $q = 1 - p$. *A l'instant initial, elle est à l'origine. Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on note* X_n *l'abscisse de la puce au énième bond.*

1. *Déterminer la loi de* X_n, *son espérance et sa variance.*
2. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} = \frac{2n+1}{4^n}\binom{2n}{n} - 1$.
3. *On suppose que* $p = \frac{1}{2}$, *pour* $k \in \mathbb{N}^*$, *quelle est la probabilité qu'elle soit à l'origine à l'instant* $2k$ *?*
4. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on note* N_n *le nombre de retour à l'origine de la puce en* n *bonds. Calculer* $E(N_n)$. *En admettant que* $\binom{2n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$, *donner un équivalent de* $E(N_n)$.
   (On peut poser R_i *la variable de Bernoulli égale à* 1 *si la puce est à l'origine à l'instant* i*).*

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 23 *Zartan est assez original, il a adopté un Orang-Outan et le laisse souvent seul à la maison. L'animal prend alors le téléphone et compose au hasard un numéro de* n *chiffres. Pour notre primate, tous les chiffres ont le même intérêt, il les utilise avec la même probabilité. Soit* X_n *le nombre d'apparition du* 0 *dans le numéro composé et* $F_n = \frac{X_n}{n}$ *(F comme "il est fou ce primate", ou comme "Fréquence").*

1. *Déterminer la loi de* X_n, *son espérance et sa variance. Donner l'espérance et la variance de* F_n.
2. *Déterminer* n *pour que la fréquence d'apparition du* 0, *dans le numéro de* n *chiffres, soit entre* 9% *et* 11% *avec une probabilité supérieure à* $90\ \%$.



Exercice 24 *C'est décidé, le maire l'a affirmé, la compagnie de transport urbain a l'obligation d'avoir, en permanence,* 80 *autobus en circulation. Elle dispose de* $m \geq 80$ *autobus et chaque véhicule a une probabilité de* 4% *d'être indisponible (panne, révision, absence du chauffeur ...).*

1. *Si* $m = 80$, *quelle est la probabilité qu'elle ne respecte pas l'engagement du maire ?*
2. *On suppose que* $m = 90$, *chaque bus ayant un numéro de* 1 *à* m. *On note* F_i *la variable aléatoire égale à* 1 *si le bus* i *fonctionne et* 0 *sinon. On note* $N = \sum_{k=1}^{90} F_i$. *Donner un majorant de* $p(|N - E(N)| \geq 7)$. *Que peut-on en déduire ?*

Exercice 25 *Le théorème de Bernoulli.*

1. *Au cours d'une expérience aléatoire, la probabilité d'un événement est* p. *On réalise, successivement, de façon indépendante,* n *expériences du type précédent. On note* F_n *la fréquence de l'événement* A. *Soit* $\varepsilon > 0$, *montrer que* $p(|F_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{pq}{n\varepsilon^2}$ *où* $q = 1 - p$.
2. *Application : on lance une pièce truquée. La probabilité d'avoir pile est* p. *Combien de fois faut-il la lancer pour que la fréquence de pile donne* p *à* 5% *avec une probabilité de* 90% *(on dit au seuil de risque de* 10%*) ?*