Chapitre 1 : Les complexes.

Exercice type 1

Déterminer le lieu des points M d'affixe z tel que $\left(\dfrac{z}{z-1}\right)^2 \in \mathbb{R}$.

Solution : On a

$$\left(\frac{z}{z-1}\right)^2 \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \left(\frac{z}{z-1}\right)^2 = \overline{\left(\frac{z}{z-1}\right)^2} \Longleftrightarrow \frac{z^2}{(z-1)^2} = \frac{\overline{z}^2}{(\overline{z}-1)^2}$$

La dernière condition est équivalente à

$$z^2(\overline{z}-1)^2 = \overline{z}^2(z-1)^2 \text{ et } z \neq 1$$

en effet, on vient de supprimer la condition de non division par zéro ! On obtient donc

$$\begin{aligned}
\left(\frac{z}{z-1}\right)^2 \in \mathbb{R} &\Longleftrightarrow z^2\overline{z}^2 - 2z^2\overline{z} + z^2 = \overline{z}^2z^2 - 2\overline{z}^2z + \overline{z}^2 \text{et } z \neq 1 \\
&\Longleftrightarrow z^2 - \overline{z}^2 = 2z^2\overline{z} - 2\overline{z}^2z \text{ et } z \neq 1 \\
&\Longleftrightarrow (z-\overline{z})(z+\overline{z}) = 2z\overline{z}(z-\overline{z}) \text{ et } z \neq 1 \\
&\Longleftrightarrow (z-\overline{z})(2z\overline{z} - (z+\overline{z})) = 0 \text{ et } z \neq 1
\end{aligned}$$

On pose alors $z = x + iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, d'où

$$\begin{aligned}
\left(\frac{z}{z-1}\right)^2 \in \mathbb{R} &\Longleftrightarrow 2iy\left(2x^2 + 2y^2 - 2x\right) = 0 \text{ et } z \neq 1 \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 + y^2 - x = 0 \end{array}\right. \text{ et } z \neq 1 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y = 0 \\ \text{ou} \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \end{array}\right. \text{ et } z \neq 1
\end{aligned}$$

La première condition se traduit par $M \in (Ox)$, la seconde par M est sur le cercle centré en A d'affixe $\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé du point B d'affixe 1.

Exercice type 2

Soit $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, montrer la seconde inégalité triangulaire

$$||z| - |z'|| \leqslant |z - z'| \text{ et } ||z| - |z'|| \leqslant |z + z'|$$

Solution : On pense belge en posant $z = (z - z') + z'$ d'où (inégalité triangulaire) $|z| \leqslant |z - z'| + |z'| \Longrightarrow |z| - |z'| \leqslant |z - z'|$. Par permutation des rôles de z et de z' (on remplace z par z' et z' par z), on a également $|z'| - |z| \leqslant |z' - z| = |z - z'|$ (car $|u| = |-u|$). Le réel $A = |z| - |z'|$ vérifie donc $A \leqslant |z - z'|$ et $-A \leqslant |z - z'|$, sa valeur absolue est donc inférieur ou égale à $|z - z'|$.
Conclusion

$$||z| - |z'|| \leqslant |z - z'|$$

On obtient l'autre inégalité en remplaçant z' par $-z'$.

Exercice type 3

Montrer que $\forall z$ tel que $|z| \neq 1$, on a

$$\left|\frac{1 - z^n}{1 - z}\right| \leqslant \frac{1 - |z|^n}{1 - |z|}$$

Solution : Si $|z| \neq 1$, on a $z \neq 1$, ainsi

$$\frac{1-z^n}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$$

en passant au module, avec l'inégalité triangulaire généralisée, il vient

$$\frac{1-z^n}{1-z} = \left|\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |z|^k = \frac{1-|z|^n}{1-|z|} \text{ car } |z| \neq 1$$

Rappel : L'inégalité triangulaire généralisée s'énonce ainsi.
Soient $(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ alors

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = |z_1 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + \cdots + |z_n| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

Preuve : Par récurrence sur n, soit $P(n)$ cette propriété, elle est varie si $n = 1$ (Initialisation). On la suppose vraie au rang n. Soient alors $n+1$ complexes $z_1, \cdots, z_{n+1}$, on a alors

$$|(z_1 + \cdots + z_n) + z_{n+1}| \underbrace{\leqslant}_{\text{Inég triang}} |z_1 + \cdots + z_n| + |z_{n+1}| \underbrace{\leqslant}_{\text{Hyp récu rang n}} |z_1| + \cdots + |z_n| + |z_{n+1}|$$

Exercice type 4

Montrer que ($|z| = 1$ et $z \neq 1$) $\Rightarrow i\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right) \in \mathbb{R}$.

Solution : Si z est de module 1 alors $|z|^2 = z\overline{z} = 1$ donc $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$. On a ainsi $\overline{i\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)} = -i\left(\dfrac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1}\right) = -i\left(\dfrac{\frac{1}{z}+1}{\frac{1}{z}-1}\right) = i\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$ d'où le résultat.

Remarque : On peut aussi écrire que $z = e^{i\theta}$, alors $i\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right) = \operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Exercice 1

On définit f sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ par $f(z) = i\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$ et $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ l'ensemble des complexes de module 1. Déterminer $A = f(\mathbb{U}\setminus\{1\})$ (utiliser l'exercice type 1).

Solution : On raisonne par double inclusion. On a montré que si $z \in \mathbb{U}\setminus\{1\}$ alors $f(z) \in \mathbb{R}$. Ainsi $A \subset \mathbb{R}$ (les images des élèments de $\mathbb{U}\setminus\{1\}$ sont des réels).
Inclusion réciproque : soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on cherche s'il existe $z \in \mathbb{U}\setminus\{1\}$ tel que $f(z) = \lambda$.
On résout donc $f(z) = \lambda \iff i(z+1) = \lambda(z-1) \iff z = \dfrac{\lambda+i}{\lambda-i}$ (on peut diviser car $\lambda \neq i$). Il reste à vérifier que $z \neq 1$ et que $|z| = 1$. Or $\dfrac{\lambda+i}{\lambda-i} = 1 \iff i = -i$ et $\left|\dfrac{\lambda+i}{\lambda-i}\right| = \dfrac{|\lambda+i|}{|\lambda-i|} = \dfrac{|\lambda+i|}{\left|\overline{\lambda+i}\right|} = 1$ car $|u| = |\overline{u}|$ si $u \in \mathbb{C}$. On a donc $\mathbb{R} \subset A$ (tout $\lambda \in \mathbb{R}$ peut s'écrire $\lambda = f(z)$ où $z \in \mathbb{U}\setminus\{1\}$).
Conclusion $A = \mathbb{R}$.

Exercice 2

Soient $(a,b)\in\mathbb{C}^2$, Montrer que $|a|=|b|\neq 0 \Longrightarrow \dfrac{(a+b)^2}{ab}\in\mathbb{R}^+$. Etudier la réciproque.

Solution : Méthode 1 : $\dfrac{(a+b)^2}{ab}=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2$. En posant $u=\dfrac{a}{b}$, alors $|u|=1$, ainsi $\dfrac{1}{u}=\overline{u}$ et $\dfrac{(a+b)^2}{ab}=2\left(1+\operatorname{Re}(u)\right)$. Pour finir, $-|u|=-1\leqslant \operatorname{Re}(u)\Longrightarrow 1+\operatorname{Re}(u)\geqslant 0$.
Méthode 2 : On pose $a=re^{i\alpha}$ et $b=re^{i\beta}$ où $r=|a|>0$ alors

$$\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{\left(e^{i\alpha}+e^{i\beta}\right)^2}{e^{i(\alpha+\beta)}}=\frac{\left(2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\right)^2}{e^{i(\alpha+\beta)}}=4\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\geqslant 0$$

Réciproquement : On suppose que $\dfrac{(a+b)^2}{ab}\in\mathbb{R}^+$, a-t-on $|a|=|b|\neq 0$? Sûrement non, un contre exemple simple suffit, avec $a=1$ et $b=2\cdots$

Exercice type 5

Calculer pour $n\geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1}$ en fonction de n.

Solution : Rappel : $(1+a)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k$. La somme proposée n'en est pas loin. On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{3^k}{3}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^k\\ &= \frac{1}{3}\left(-1+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k\right)=\frac{4^n-1}{3}\end{aligned}$$

Le résultat est encore valable si on convient que $\displaystyle\sum_{k=1}^{0}=0$.

Exercice type 6

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in\mathbb{N}$ tel que $1\leqslant k\leqslant n$. Montrer que $k\dbinom{n}{k}=n\dbinom{n-1}{k-1}$. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramétre n et $p\in[0,1]$. Calculer l'espérance de X (i.e. calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}kP(X=k)=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$).

Solution : Puisque $1\leqslant k\leqslant n$, on a $k\dbinom{n}{k}=k\times\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$. Or $\dfrac{k}{k!}=\dfrac{1}{(k-1)!}$ si $k\geqslant 1$ (c'est faux si $k=0$). Donc

$$k\binom{n}{k}=\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}=\frac{n\times(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!}=n\binom{n-1}{k-1}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}E(X)=&\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} &&=\sum_{k=\mathbf{1}}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} &&\text{(L'indice } k=0 \text{ donne } 0)\\ =&\sum_{k=\mathbf{1}}^{n}n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} &&=n\sum_{k=\mathbf{1}}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} &&(n \text{ ne dépend pas de l'indice})\\ =&\ np\sum_{k=\mathbf{1}}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k} &&=np\sum_{j=\mathbf{0}}^{n-1}\binom{n-1}{j}p^j(1-p)^{n-1-j} &&\text{On pose } j=k-1 \text{ dans la somme}\\ =&\ np\,(p+1-p)^{n-1} &&=np\end{aligned}$$

Exercice type 7

Linéariser $\cos^3(x)$ et $\sin^3(x)$.

Solution : Soit $z = e^{ix}$, alors $\dfrac{1}{z} = e^{-ix}$. On en déduit que $\cos(x) = \dfrac{z+\frac{1}{z}}{2} \Longrightarrow \cos^3(x) = \dfrac{1}{2^3}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^3$. Avec le binôme, on obtient

$$\begin{aligned}
\cos^3(x) &= \frac{1}{2^3}\left(z^3+3z^2\times\frac{1}{z}+3z\times\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}\right) = \frac{1}{2^3}\left(\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+3\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{2}\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+3\times\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{\cos(3x)+3\cos(x)}{4}
\end{aligned}$$

De même $\sin x = \dfrac{z-\frac{1}{z}}{2i}$ d'où

$$\begin{aligned}
\sin^3(x) &= \frac{1}{2^3i^3}\left(z^3-3z^2\times\frac{1}{z}+3z\times\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}\right) = -\frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{2i}\left(z^3-\frac{1}{z^3}\right)-3\times\frac{1}{2i}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\\
&= -\frac{\sin(3x)-3\sin(x)}{4}
\end{aligned}$$

Exercice type 8

Trouver deux polynômes P et Q tels que $\cos(4x) = P(\cos x)$ et $\sin(4x) = \sin(x)\,Q(\cos x)$.

Solution : On sait que $\cos(4x)+i\sin(4x) = e^{4ix} = \left(e^{ix}\right)^4 = (\cos(x)+i\sin(x))^4$, ainsi

$$\begin{aligned}
\cos(4x)+i\sin(4x) &= \cos^4(x)+4\cos^3(x)\,i\sin(x)+6\cos^2(x)\,i^2\sin^2(x)+4\cos(x)\,i^3\sin^3(x)+\sin^4(x)\\
&= \left(\cos^4(x)-6\cos^2(x)\sin^2(x)+\sin^4(x)\right)+i\left(4\cos^3(x)\sin(x)-4\cos(x)\sin^3(x)\right)
\end{aligned}$$

Par unicité des parties réelles et imaginaires, on a

$$\begin{aligned}
\cos(4x) &= \cos^4(x)-6\cos^2(x)\sin^2(x)+\sin^4(x)\\
\sin(4x) &= 4\cos^3(x)\sin(x)-4\cos(x)\sin^3(x)
\end{aligned}$$

Pour finir, on a

$$\begin{aligned}
\cos(4x) &= \cos^4(x)-6\cos^2(x)\left(1-\cos^2(x)\right)+\left(1-\cos^2(x)\right)^2\\
&= 8\cos^4(x)-8\cos^2(x)+1\\
\sin(4x) &= 4\cos^3(x)\sin(x)-4\cos(x)\sin(x)\left(1-\cos^2(x)\right)\\
&= 4\sin(x)\left(2\cos^3(x)-\cos(x)\right)
\end{aligned}$$

En posant $P(X) = 8X^4-8X^2+1$ et $Q(X) = 8X^3-4X$, on a le résultat demandé.

Exercice type 9

Calculer pour $a\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$ les sommes $C = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(ak)$ et $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(ak)$.

Solution : On pose $\Sigma = C + iS$, ainsi

$$\Sigma = \sum_{k=0}^{n} \cos(ak) + i\sin(ak) = \sum_{k=0}^{n} e^{i(ak)} = \sum_{k=0}^{n} e^{iak} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{ia}\right)^k$$

Rappel important : si $q \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ si } q \neq 1 \\ n+1 \text{ si } q = 1 \end{cases}$$

On distingue deux cas :
Si $e^{ia} = 1$, ce qui équivaut à $a = 0\ (2\pi)$, alors $\Sigma = n+1$, par unicité des parties réelles et imaginaires

$$C = n+1 \text{ et } S = 0$$

(ouf ! car dans si $a = 0\ (2\pi)$ alors $\cos(ka) = 1$ et $\sin(ka) = 0$).
Si $e^{ia} \neq 1$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} \left(e^{ia}\right)^k = \frac{\left(e^{ia}\right)^{n+1} - 1}{e^{ia} - 1} = \frac{e^{i(n+1)a} - 1}{e^{ia} - 1} = \frac{2i\sin\left(\dfrac{n+1}{2}a\right) e^{i\frac{n+1}{2}a}}{2i\sin\left(\dfrac{a}{2}\right) e^{i\frac{a}{2}}} = \frac{\sin\left(\dfrac{n+1}{2}a\right)}{\sin\left(\dfrac{a}{2}\right)} e^{i\frac{na}{2}}$$

Ainsi

$$\Sigma = \frac{\sin\left(\dfrac{n+1}{2}a\right)}{\sin\left(\dfrac{a}{2}\right)} \times \left(\cos\left(\frac{na}{2}\right) + i\sin\left(\frac{na}{2}\right)\right)$$

Par unicité des parties réelles et imaginaires, on a

$$C = \frac{\sin\left(\dfrac{n+1}{2}a\right)}{\sin\left(\dfrac{a}{2}\right)} \cos\left(\frac{na}{2}\right) \text{ et } S = \frac{\sin\left(\dfrac{n+1}{2}a\right)}{\sin\left(\dfrac{a}{2}\right)} \sin\left(\frac{na}{2}\right)$$

Exercice 3

Calculer les racines deuxièmes de $1+i$ sous forme polaire, en déduire $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$ et $\tan\dfrac{\pi}{8}$

Solution : Sous forme algèbrique, on cherche $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z^2 = 1 + i$. On obtient

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{2} \text{ (équation aux modules)} \\ 2ab = 1 > 0 \end{cases}$$

d'où $2a^2 = \sqrt{2} + 1$ et $2b^2 = \sqrt{2} - 1$. Puisque a et b sont de même signe, on obtient les deux racines deuxièmes

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \text{ et } -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

Sous forme polaire, $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ainsi les racines deuxièmes sont $\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$ et $-\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}$. Puisque $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ et $\sin\frac{\pi}{8} > 0$, on a

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} = \sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

d'où

$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}},\ \sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}},\ \tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2}-1$$

Exercice 4

Calculer les racines

$$\begin{array}{ll} 2^{ièmes} \text{ de } 2i & 2^{ièmes} \text{ de } 8-6i \\ 3^{ièmes} \text{ de } \dfrac{-1-i}{4} & 3^{ièmes} \text{ de } -i \\ 4^{ièmes} \text{ de } -4 & 2^{ièmes} \text{ de } 1+i\sqrt{3} \end{array}$$

Solution : On a $2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}$, une racine deuxième est donc $z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=1+i$, l'autre est $z_2=-z_1$.
On cherche $z=a+ib$ tel que $z^2=8-6i$, on obtient $\left\{\begin{array}{c} a^2-b^2=8 \\ a^2+b^2=|z|^2=|8+6i|=10 \\ 2ab=-6<0 \end{array}\right.$, d'où $a^2=9$ et $b^2=1$. Une racine est $z_1=3-i$, l'autre est $z_2=-z_1$.
On a $\frac{-1-i}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}e^{\frac{3i\pi}{4}}=2^{-\frac{3}{2}}e^{\frac{3i\pi}{4}}$, les racines $3^{ièmes}$ sont donc les $\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{3\pi}{4\times3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$ avec $k=0,1,2$. Ce qui donne

$$z_0=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{1+i}{2},\ z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)}=z_0j \text{ et } z_2=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)}=z_0j^2$$

On a $-i=e^{\frac{3i\pi}{2}}$, les racines $3^{ièmes}$ de $-i$ sont donc les $e^{i\left(\frac{3\pi}{2\times3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$ avec $k=0,1,2$. Ce qui donne

$$z_0=e^{i\frac{\pi}{2}}=i,\quad z_1=ij \text{ et } z_2=ij^2$$

On a $-4=4e^{i\pi}$, ses racines $4^{ièmes}$ sont donc $4^{\frac{1}{4}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)}$ avec $k=0,1,2,3$. Ce qui donne

$$z_0=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=1+i,\ z_1=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}=iz_0=-1+i,\ z_2=-z_0 \text{ et } z_3=-z_1$$

Enfin, $1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}=-2j^2$, une racine deuxième est donc $\sqrt{2}ij$, l'autre est $-\sqrt{2}ij$ (c'est aussi $\pm\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\cdots$).

Exercice type 10

Pour $n\geqslant 1$, soient $(\omega_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ les racines énièmes de l'unité ($\omega_k=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$), calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k \text{ et } \prod_{k=0}^{n-1}\omega_k$$

Solution : On a $\omega_k=(\omega)^k$ où $\omega=e^{\frac{2i\pi}{n}}$, ainsi

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k=\sum_{k=0}^{n-1}(\omega)^k$$

Pour $n=1$, on a $\omega=1$ et la somme se réduit à $\sum_{k=0}^{0}1=1$. Sinon $\omega\neq1$ et $\sum_{k=0}^{n-1}(\omega)^k=\dfrac{1-\omega^n}{1-\omega}=0$ car $\omega^n=1$ (ω est une racine énième de 1 !, ou bien car $\omega^n=e^{\frac{2in\pi}{n}}=1$).
Pour le produit, si $n=1$, on a $\prod_{k=0}^{0}\omega_k=\prod_{k=0}^{0}1=1$, sinon

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}e^{\frac{2ik\pi}{n}} &= e^{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2ik\pi}{n}} \\ \sum_{k=0}^{n-1}\frac{2ik\pi}{n} &= \frac{2i\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}k=\frac{2i\pi}{n}\times\frac{(n-1)\,n}{2}=i\pi\,(n-1)\end{aligned}$$

Ainsi
$$\prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{i\pi(n-1)} = \left(e^{i\pi}\right)^{n-1} \text{ (De moivre)} = (-1)^{n-1}$$
On peut aussi écrire que
$$P(X) = X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k) \Longrightarrow P(0) = -1 = \prod_{k=0}^{n-1} (-\omega_k) = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \omega_k \Longrightarrow \prod_{k=0}^{n-1} \omega_k = (-1)^{n-1}$$

Exercice type 11

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, $(z-1)^n = (z+1)^n$ où $n \geqslant 2$.

Solution : On a
$$\begin{aligned}
(z-1)^n = (z+1)^n &\Leftrightarrow \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 1 \text{ car } z = -1 \text{ n'est pas solution} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \{0, .., n-1\}, \frac{z-1}{z+1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow \exists k \in \{0, .., n-1\}, \ z - 1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}} (z+1) \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \{0, .., n-1\}, \ z\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = 1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}
\end{aligned}$$
Avant de diviser (puisqu'on ne divise jamais par zéro et que $1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0$ lorsque $k = 0$), on élimine le cas $k = 0$. En effet il ne peut se présenter, puisqu'il conduit à l'égalité $0 = 2$. On a donc
$$\begin{aligned}
(z-1)^n = (z+1)^n &\Leftrightarrow \exists k \in \left\{\boxed{1}, .., n-1\right\}, \ z = \frac{1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \{1, .., n-1\}, \ z = \frac{1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}} = \frac{2\cos\frac{k\pi}{n} e^{\frac{ik\pi}{n}}}{-2i\sin\frac{k\pi}{n} e^{\frac{ik\pi}{n}}} = i\,\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$
car $\frac{1}{i} = -i$. Les solutions sont les $i\,\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in \{1, .., n-1\}$.

Remarque : Les solutions sont bien imaginaires pures,ce que l'on peut prévoir, en effet **si** z est solution de $(z-1)^n = (z+1)^n$, en passant au module, on obtient $|z-1|^n = |z+1|^n$, les **réels positifs** $|z-1|$ et $|z+1|$ ont donc même puissances énièmes, donc sont égaux. On a donc $|z-1| = |z+1|$. Ceci signifie que le point d'affixe z est sur la médiatrice des points d'affixe 1 et -1. Mais cette médiatrice est l'axe des imaginaires purs.
On a $n-1$ solutions et non pas n solutions. En effet, on cherche les racines du polynôme $P(z) = (z-1)^n - (z+1)^n$, en développant par le binôme de Newton ce polynôme, on a
$$P(z) = \left(z^n - nz^{n-1} + \cdots\right) - \left(z^n + nz^{n-1} + \cdots\right) = -2nz^{n-1} + \cdots$$
On constate donc que P est de degré $n-1$, il admet donc $n-1$ racines sur $\mathbb{C}$.

Exercice 5

Résoudre (E) : $1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Solution : On a, pour $z \neq 1$
$$\begin{aligned}
1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n &= 1 + 2z\sum_{k=0}^{n-2} z^k + z^n \\
&= 1 + 2z\frac{z^{n-1} - 1}{z-1} + z^n = \frac{2z^n - 2z + (z^n + 1)(z-1)}{z-1} \\
&= \frac{z^{n+1} + z^n - z - 1}{z-1} = \frac{(z^n - 1)(z+1)}{z-1}
\end{aligned}$$

Puisque $z=1$ n'est pas solution, on en déduit que z

$$(E) \iff z=-1 \text{ ou } z^n = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \text{ avec } k \in \{1, \cdots, n-1\}$$

Exercice type 12

Résoudre $z^2-(4+i)\,z+5+5i=0$.

Solution : Le discriminant vaut $\Delta = (4+i)^2 - 4\times 5\times(1+i) = -5-12i$. On cherche $\delta = a+ib$ tel que $\delta^2=\Delta$. On obtient alors (avec $\Delta = (a+ib)^2$ et $|\Delta| = |\delta|^2$)

$$\begin{cases} a^2-b^2=-5 \\ 2ab=-12<0 \\ a^2+b^2=\sqrt{25+144}=13 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2a^2=8 \\ 2b^2=18 \\ a \text{ et } b \text{ de signe opposé} \end{cases}$$

On choisit alors $\delta = 2-3i$ et les racines sont

$$z_1 = \frac{(4+i)+(2-3i)}{2} = 3-i \text{ et } z_2 = \frac{(4+i)-(2-3i)}{2} = (4+i)-(3-i) = 1+2i$$

Exercice 6

Résoudre $z^8 - 2\left(i\sqrt{3}-1\right)z^4 - 8\left(1+i\sqrt{3}\right)=0$.

Solution : On pose $Z=z^4$, on se souvient que $j = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{j} = j^2 = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, on doit ainsi résoudre

$$Z^2-4jZ+16j^2=0$$

Le discriminant vaut $\Delta' = 4^2j^2 - 4\times 16j^2 = -4^2\times 3j^2 = \left(i\times 4\sqrt{3}j\right)^2$. Les racines en Z sont donc

$$Z = \frac{4j\pm 4i\sqrt{3}j}{2} = 2j\left(1\pm i\sqrt{3}\right)$$

Soit

$$Z_1 = 2j\left(1+i\sqrt{3}\right) = -4j\times j^2 = -4 \text{ et } Z_2 = 2j\left(1-i\sqrt{3}\right) = -4j\times j = -4j^2$$

On résout ensuite $z^4=-4=4e^{i\pi}$ et $z^4=-4j^2=4e^{i\frac{\pi}{3}}$ ce qui donne

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)},\ k=0,1,2,3 \\ \text{et } z &= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}\right)},\ k=0,1,2,3 \end{aligned}$$

la première famille de solutions s'écrit $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$. La seconde peut s'exprimer sous forme cartesienne, mais cela passe par le calcul de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice type 13

Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que les points $M(z)$, $N(z^2)$ et $P\left(\frac{1}{z}\right)$ soient alignés.

Solution : Puisque P a pour affixe $\dfrac{1}{z}$, on suppose $z \neq 0$. On sait que

$$\begin{array}{rcl} M,N,P \text{ alignés} & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{c} \dfrac{\frac{1}{z}-z}{z^2-z} \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ z^2-z \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} -\dfrac{z+1}{z^2} \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ z=0 \text{ ou } z=1 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{c} \dfrac{z+1}{z^2} = \overline{\left(\dfrac{z+1}{z^2}\right)} \\ \text{ou} \\ z=1 \text{ (car on sait que } z\neq 0) \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} (z+1)\,\overline{z}^2 = (\overline{z}+1)\,z^2 \\ \text{ou} \\ z=1 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{c} z\overline{z}\,(\overline{z}-z) = (z-\overline{z})\,(z+\overline{z}) \\ \text{ou} \\ z=1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} (\overline{z}-z)\,(z\overline{z}+z+\overline{z}) = 0 \\ \text{ou} \\ z=1 \end{array}\right. \end{array}$$

Remarque : On a simplifié, $\dfrac{\frac{1}{z}-z}{z^2-z} = \dfrac{1-z^2}{z^2\,(z-1)} = -\dfrac{z+1}{z^2}$ et on a uilisé le fait que $-\dfrac{z+1}{z^2} \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \dfrac{z+1}{z^2} \in \mathbb{R}$
On obtient donc comme condition, .

$$M,N,P \text{ alignés} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z \in \mathbb{R}^* \text{ (qui inclus } z=1) \\ \text{ou } |z|^2 + (z+\overline{z}) = 0 \end{array}\right.$$

Si on pose $z = x+iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|z|^2 + (z+\overline{z}) = x^2+y^2+2x = (x+1)^2 + y^2 - 1$. On en déduit que le lieu cherché est la réunion de l'axe des réels privé de O et du cercle de centre $(-1,0)$, de rayon 1 (privé de O aussi !).

Exercice 7

Soient ABC et DEF deux triangles équilatéraux directs, on construit G et H tels que $EDBG$ et $CDFH$ soient des parallélogrammes. Montrer que AGH est équilatéral.

Solution : On sait que ABC est équilatéral direct ainsi

$$c-a = e^{i\frac{\pi}{3}}\,(b-a) = -j^2\,(b-a) \text{ car } e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2$$

De même, on a

$$f-d = -j^2\,(e-d)$$

soit

$$c = \left(1+j^2\right)a - j^2 b = -ja - j^2 b \text{ et } f = -jd - j^2 e$$

Dans un parallèlogramme les diagonales se coupent au milieu donc $\dfrac{e+b}{2} = \dfrac{d+g}{2} \Longrightarrow g = e+b-d$ et de même $h = c+f-d$. Il s'agit enfin de prouver que

$$h-a = -j^2\,(g-a)$$

Or

$$\begin{aligned} h-a &= c+f-d-a = (-j-1)\,a - j^2 b + (-j-1)\,d - j^2 e \\ &= -j^2\,(-a+b-d+e) = -j^2\,(g-a)\,. \end{aligned}$$