Chapitre 10 : Borne sup, partie entière, suites classiques

Exercice type 1

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$, justifier que $A \cup B$ admet une borne sup et l'exprimer en fonction de celles de A et B.

Solution : On pose $C = A \cup B$, puisque A et B sont non vides et majorées, $\sup A$ et $\sup B$ existent. Soit $M = \max(\sup A, \sup B)$ Si $c \in C$, alors, ou bien $c \in A \Longrightarrow c \leqslant \sup A \leqslant M$, ou bien $c \in B \leqslant \sup B \leqslant M$. Puisque $C \neq \varnothing$ et est majorée par M, on en déduit que $\sup C$ existe et $\sup C \leqslant M$.
Il reste à prouver la réciproque i.e. que $M \leqslant \sup C$.
Soit S un majorant de C. $\forall a \in A$, on a $a \in C$, alors $a \leqslant S$, ainsi S majore A donc $\sup A \leqslant S$. De même (symétrie des rôles) $\sup B \leqslant M$ d'où $M = \max(\sup A, \sup B) \leqslant S$. Ceci prouve que M est le plus petit des majorants de C. Conclusion

$$M = \sup C$$

Exercice type 2

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$, on définit $A+B = \{a+b,\ a \in A,\ b \in B\}$. Justifier que $\sup(A+B)$ existe et l'exprimer en fonction de celles de A et B.

Solution : Puisque A et B sont non vides et majorées, $\sup A$ et $\sup B$ existent. On pose alors $C = A + B$, si $c \in C$, alors

$$\exists (a,b) \in A \times B,\ c = a + b$$

Puisque $a \leqslant M_A$ et $b \leqslant M_B$ on en déduit que

$$c \leqslant \sup A + \sup B$$

Ainsi C est majorée par $\sup A + \sup B = M$. Puisque $C \neq \varnothing$ et est majorée par M, on en déduit que $\sup C$ existe et $\sup C \leqslant M$.
Pour la réciproque, on a deux méthodes :
Première méthode : soit S un majorant de C. Soit $b \in B$ fixé, on a $\forall a \in A,\ a + b \in C \Longrightarrow a + b \leqslant S \Longrightarrow a \leqslant S - b$. Ainsi $S - b$ majore A d'où

$$\sup A \leqslant S - b$$

Puisque b est quelconque, on en déduit que

$$\forall b \in B,\ b \leqslant S - \sup A$$

Ainsi $S - \sup A$ majore B d'où

$$\sup B \leqslant S - \sup A \Longrightarrow \sup A + \sup A \leqslant S$$

Ceci prouve que $\sup A + \sup B$ est le plus petit des majorants donc que

$$\sup A + \sup B = \sup(A + B)$$

Seconde méthode : On sait qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $a_n \in A$, $b_n \in B$, $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup A$ et $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup B$. On pose $c_n = a_n + b_n$ alors $c_n \in C$ et $\rfloor_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup A + \sup B$. Ainsi $\sup(C) = \sup A + \sup B$.

Exercice type 3

Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$, on déinit $B = \left\{|x-y|, (x,y) \in A^2\right\}$. Montrer que $\sup B$ existe et que $\sup B = \sup A - \inf A$.

Solution : Notons $M = \sup A$ et $m = \inf A$ qui existent car A est non vide et bornée. Soit $(x, y) \in A^2$, on a $m \leqslant x \leqslant M$ et $m \leqslant y \leqslant M$, donc $m - M \leqslant x - y \leqslant M - m$, soit

$$|x - y| \leqslant M - m$$

On en déduit que $B = \{|x - y|, x \in A, y \in A\}$ est non vide majorée par $M - m$, ainsi $\sup B$ existe et

$$\sup_{(x,y)\in A^2} |x - y| \leqslant M - m$$

Reste à prouver que $M - m$ est bien égal à $\sup B$.
Première méthode : Soit M_1 un majorant de B, alors pour tout $(x, y) \in A^2$, on a $x-y \leqslant |x - y| \leqslant M_1 \Longrightarrow x \leqslant M_1+y$. Ceci prouve que, à $y \in A$ fixé, $M_1 + y$ majore tous les éléments x de A, donc est un majorant de A. En particulier, $\sup A = M$ lui est inférieur. Donc

$$\forall y \in A,\ M \leqslant M_1 + y \Longrightarrow \forall y \in A,\ M - M_1 \leqslant y$$

On en déduit que $M - M_1$ est un minorant de A, en partculier

$$M - M_1 \leqslant m \Longrightarrow M - m \leqslant M_1$$

donc $M - m$ est bien le plus petit des majorants de B, il s'agit bien de la borne sup de B.
Seconde méthode : il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(a_n, b_n) \in A^2$, $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup A$ et $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \inf A$. On a alors $|a_n - b_n| \in B$ et $|a_n - b_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\sup A - \inf A| = \sup A - \inf A$ (car $\sup \geqslant \inf$!). On a donc une suite de B qui converge vers un majorant de B, ce majorant est la borne sup de B.

Exercice type 4

Soit x un réel, et n un entier supérieur ou égal à 1, montrer que $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Solution : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor$. On a

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \left\lfloor \frac{\lfloor nx+n \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x+1 \rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor + n}{n} \right\rfloor - \lfloor x+1 \rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + 1 \right\rfloor - \lfloor x+1 \rfloor \\ &= f(x) \text{ car si } \alpha \in \mathbb{R},\ \ \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1 \end{aligned}$$

La fonction f est donc $1-$ périodique. Si $0 \leqslant x < 1$, on a

$$0 \leqslant nx < n \Longrightarrow 0 \leqslant \lfloor nx \rfloor \leqslant nx < n$$

(attention, on ne peut pas passer à la partie entière directement qui n'est pas strictement croissante) d'où $0 \leqslant \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} < 1$ et ainsi $f(x) = 0$ sur $[0, 1[$. La fonction f est donc nulle sur $[0, 1[$ et $1-$périodique donc identiquement nulle.

Exercice type 5

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Solution : Soit $f(x)=\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor\right)-\lfloor nx\rfloor$, alors

$$\begin{aligned}
f\left(x+\frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{1}{n}+\frac{k}{n}\right\rfloor-\lfloor nx+1\rfloor=\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k+1}{n}\right\rfloor-\lfloor nx\rfloor-1\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left\lfloor x+\frac{j}{n}\right\rfloor-\lfloor nx\rfloor-1=\lfloor x+1\rfloor+\sum_{j=1}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{j}{n}\right\rfloor-\lfloor nx\rfloor-1 \text{ (on a posé } j=k+1)\\
&= \lfloor x\rfloor+1+\sum_{j=1}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{j}{n}\right\rfloor-\lfloor nx\rfloor-1=\left\lfloor x+\frac{0}{n}\right\rfloor+\sum_{j=1}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{j}{n}\right\rfloor-\lfloor nx\rfloor\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{j}{n}\right\rfloor-\lfloor nx\rfloor=f(x)
\end{aligned}$$

ainsi la fonction f est $\frac{1}{n}$ périodique, il suffit de prouver qu'elle est nulle sur l'intervalle $\left[0,\frac{1}{n}\right[$. Mais

$$\left.\begin{array}{c}0\leqslant x<\dfrac{1}{n}\\ 0\leqslant k\leqslant n-1\end{array}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{array}{c}0\leqslant x<\dfrac{1}{n}\\ 0\leqslant\dfrac{k}{n}\leqslant 1-\dfrac{1}{n}\end{array}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{array}{c}0\leqslant nx<1\\ 0\leqslant x+\frac{k}{n}<1\end{array}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{array}{c}\lfloor x+\frac{k}{n}\rfloor=0\\ \lfloor nx\rfloor=0\end{array}\right\}$$

d'où

$$f(x)=0 \text{ sur } \left[0,\frac{1}{n}\right[$$

et par périodicité on a $f=0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1

Soit x un réel, on a défini les valeurs décimales approchées de x par $d_n=\frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}$ et $D_n=u_n+10^{-n}$. Montrer que les suites $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

Solution : Montrons que $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On a $d_{n+1}-d_n=\frac{1}{10^{n+1}}\left(\lfloor 10^{n+1}x\rfloor-10\lfloor 10^n x\rfloor\right)$. Or

$$10^n x-1<\lfloor 10^n x\rfloor\leqslant 10^n x\Longrightarrow 10^{n+1}x-10<10\lfloor 10^n x\rfloor\leqslant 10^{n+1}x$$

d'où

$$\left.\begin{array}{c}-10^{n+1}x\leqslant -10\lfloor 10^n x\rfloor<10-10^{n+1}x\\ 10^{n+1}x-1<\lfloor 10^{n+1}x\rfloor\leqslant 10^{n+1}x\end{array}\right\}\Longrightarrow -1<\lfloor 10^{n+1}x\rfloor-10\lfloor 10^n x\rfloor<10$$

Puisque $\lfloor 10^{n+1}x\rfloor-10\lfloor 10^n x\rfloor$ est un entier, on en déduit que $0\leqslant\lfloor 10^{n+1}x\rfloor-10\lfloor 10^n x\rfloor\leqslant 9$ ainsi $0\leqslant d_{n+1}-d_n\leqslant\frac{9}{10^{n+1}}$.
Ceci prouve la croissance de $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour la décroissance de $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{10^{n+1}}\left(\lfloor 10^{n+1}x\rfloor-10\lfloor 10^n x\rfloor-9\right)$$

Compte tenu de ce qui précède, on a

$$-9\leqslant\lfloor 10^{n+1}x\rfloor-10\lfloor 10^n x\rfloor-9\leqslant 0$$

ce qui prouve la décroissance de $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

Si on suppose que x et y sont des réels non-entiers et que $x+y$ est un entier ($x \notin \mathbb{Z}$, $y \notin \mathbb{Z}$ et $x+y \in \mathbb{Z}$), montrer qu'on a :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = x + y - 1.$$

Solution : Par hypothèse $x \notin \mathbb{Z}$ et $y \notin \mathbb{Z}$, mais $x + y = n \in \mathbb{Z}$. On a donc $\lfloor x \rfloor \neq x$ car sinon $x \in \mathbb{Z}$, contraire à l'hypothèse, et de même $E(y) \neq y$, ceci justifie la double inégalité stricte

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor < x \text{ et } y - 1 < \lfloor y \rfloor < y$$

(d'après la définition, on a juste $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$). En sommant, il vient $n - 2 = x + y - 2 < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor < x + y = n$. L'entier $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ est donc entre $n - 2$ et n, il est donc égal à $n - 1$

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = n - 1 = x + y - 1$$

Exercice 3

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante telle que si $x \in \mathbb{Q}$ alors $f(x) = x$, montrer que $f = Id_{\mathbb{R}}$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ monotone telle que $(E) : (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Montrer que f est de la forme $f(x) = \alpha x$ où α est une constante.

Solution : Pour $x \in \mathbb{R}$, on désigne par d_n et D_n es approximations décimales par défaut et par excès de x. On sait que $(d_n, D_n) \in \mathbb{Q}^2$ convergent vers x et $d_n \leqslant x \leqslant D_n$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, par croissance de f, on a

$$f(d_n) = d_n \leqslant f(x) \leqslant D_n = f(D_n)$$

En passant à la limite, on obtient $f(x) = x$.

2. Si f est décroissante, alors $-f$ est croissante et $-f(x + y) = -f(x) - f(y)$, ainsi $-f$ vérifie (E). On peut donc supposer que f est croissante.
On commence par calculer $f(0)$. Avec $x = y = 0$, on a $f(0) = 2f(0)$ d'où $f(0) = 0$.
Avec $y = -x$, on en déduit que $f(0) = f(x) + f(-x) \Longrightarrow f(-x) = -f(x)$, ainsi f est impaire.
Puis par récurrence, on prouve $\mathcal{P}(n) =$ "$\forall x \in \mathbb{R},\ f(nx) = nf(x)$". C'est vrai au rang $n = 0$ puisque $f(0) = 0$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie au rang n, alors

$$f((n+1)x) = f(nx) + f(1x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$$

On prouve ensuite que $f(px) = pf(x)$ lorsque $p \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$. Si $p \geqslant 0$, alors $p \in \mathbb{N}$ et on vient de le prouver. Si $p < 0$, alors $-p \in \mathbb{N}$ et ainsi

$$\begin{aligned} f(-px) &= (-p)f(x) = -f(1x) \text{ mais } f(-px) = -f(px) \text{ par imparité} \\ \text{d'où } f(px) &= pf(x) \end{aligned}$$

On va maintenant prouver que $f(r) = rf(1)$ si $r \in \mathbb{Q}$. Soit $r \in \mathbb{Q}$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \frac{p}{q}$. On a alors

$$qf(r) = qf\left(\frac{p}{q}\right) = f(p) = pf(1) \Longleftrightarrow f(r) = rf(1)$$

Pour conclure : soit $x \in \mathbb{R}$, par croissance de f, on a

$$f(d_n) = d_n f(1) \leqslant f(x) \leqslant D_n f(1) = f(D_n)$$

d'où en passant à la limite $f(x) = xf(1) = \alpha x$ où $\alpha = f(1)$.

Exercice type 6

On définit pour $n \geqslant 2$, $u_n = \prod_{k=2}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$. Soit $v_n = u_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$, monter que $(v_n)_n$ est géométrique, en déduire u_n et la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

Solution : Soit $n \geqslant 2$, alors $v_{n+1} = u_{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$, mais $u_{n+1} = u_n \times \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ d'où

$$v_{n+1} = u_n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}u_n \sin\left(\frac{2\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}u_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}v_n$$

La suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ et donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$. On en déduit que, pour $n \geqslant$

$$v_n = \frac{v_2}{2^{n-2}} = \frac{u_2 \sin\dfrac{\pi}{4}}{2^{n-2}} = \frac{\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}}{2^{n-2}} = \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}}{2^{n-2}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

et

$$u_n = \frac{v_n}{\sin\dfrac{\pi}{2^n}} = \frac{1}{2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{2^n}} \sim \frac{1}{2^{n-1}\dfrac{\pi}{2^n}} = \frac{2}{\pi}$$

ce qui prouve que

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}$$

Exercice type 7

Déterminer l'expression générale de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque,

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$, $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$, $u_0 = \dfrac{5}{6}$ et $u_1 = \dfrac{13}{6}$, calculer alors $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$, $u_0 = 1$ et $u_1 = 3$, puis montrer que u_n peut s'écrire $\rho^n G\cos(n\theta - \varphi)$.

Solution : On applique le cours.

1. L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2$. Il existe donc $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tels que $u_n = (A+Bn)\,2^n$. Avec les conditions initiales,on a $\begin{cases} u_0 = A = 1 \\ u_1 = 3(A+B) = 0 \end{cases}$ d'où $u_n = (1-n)\,2^n$.
2. L'équation caractéristique est $r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3)$, il existe donc $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tels que $u_n = A \times 2^n + B \times 3^n$. Avec les conditions initiales,on a $\begin{cases} u_0 = A + B = \dfrac{5}{6} \\ u_1 = 2A + 3B = \dfrac{13}{6} \end{cases}$ ce qui donne $B = \dfrac{13}{6} - \dfrac{10}{6} = \dfrac{1}{2}$ et $A = \dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$. Ainsi $u_n = \dfrac{2^n}{3} + \dfrac{3^n}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On a alors

$$S_n = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n} 2^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{2^{n+1}-1}{3} + \frac{3^{n+1}-1}{4} = \frac{2^{n+3}+3^{n+2}-7}{12}.$$

3. L'équation caractéristique est r^2-2r+2 dont les racines sont $r=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $\overline{r}$. Il existe donc $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tels que $u_n=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(A\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)+B\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$. Avec les conditions initiales,on a $\begin{cases} u_0=A=1\\ u_1=A+B=3\end{cases}$. Ainsi $u_n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)+2\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)=2^{\frac{n}{2}}\sqrt{5}\cos\left(\frac{n\pi}{4}-\varphi\right)$ où $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $\sin\varphi=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ d'où $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan\varphi=2$, ce qui donne $\varphi=\arctan(2)$. On a donc
$$u_n=2^{\frac{n}{2}}\sqrt{5}\cos\left(\frac{n\pi}{4}-\arctan 2\right)$$

Exercice type 8

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites déterminées par $u_0=1$, $v_0=2$ et pour $n\in\mathbb{N}$
$$\begin{cases} u_{n+1}=3u_n+2v_n\\ v_{n+1}=2u_n+3v_n\end{cases}$$
Etudier la suite $(v_n-u_n)_n$. En déduire les expressions de u_n et v_n pour $n\in\mathbb{N}$.

Solution : On a $v_{n+1}-u_{n+1}=(2u_n+3v_n)-(3u_n+2v_n)=v_n-u_n$, cette suite est constante égale à son premier terme qui vaut donc 1. On en déduit que
$$\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=u_n+1$$
On remplace dans la relation $u_{n+1}=3u_n+2v_n$ pour avoir $u_{n+1}=3u_n+2(u_n+1)=5u_n+2$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. Soit ℓ tel que $\ell=5\ell+2\iff\ell=-\frac{1}{2}$, on pose $w_n=u_n+\frac{1}{2}$. Alors
$$w_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{2}=5u_n+2+\frac{1}{2}=5\left(u_n+\frac{1}{2}\right)=5w_n$$
La suite $(w_n)_n$ est géométrique de raison 5 de premier terme $u_0+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. On a donc $w_n=\dfrac{3\times 5^n}{2}$ et, pour $n\in\mathbb{N}$
$$u_n=\frac{3\times 5^n-1}{2},\ v_n=\frac{3\times 5^n+1}{2}$$

Remarque : On peut aussi utilise $(u_n+v_n)_n$ qui est géométrique.

Exercice type 9

On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0=1$, $u_1=2$ et $u_{n+2}=\sqrt{\dfrac{u_{n+1}^9}{u_n^4}}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et calculer u_n en fonction de n.

Solution : Par récurrence immédiate à deux termes. Pour $n\in\mathbb{N}$, on définit la propriété $\mathcal{P}(n)=$ "u_n existe et $u_n>0$". On a $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ qui sont vraies (car u_0 et u_1 sont donnés). Supposons à n fixé, $n\geqslant 0$ que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies. Alors $u_{n+2}=\sqrt{\dfrac{u_{n+1}^9}{u_n^4}}$ existe et est strictement positif. On en déduit donc que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie. Par récurrence, on a $\mathcal{P}(n)$ vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.
On peut alors considérer $v_n=\ln u_n$ qui vérifie $v_{n+2}=\dfrac{1}{2}(9v_{n+1}-4v_n)=\dfrac{9}{2}v_{n+1}-2v_n$. Ainsi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.L'équation caractéristique est $r^2-\dfrac{9}{2}r+2$ dont les solutions sont $r_1=\dfrac{1}{2}$ et $r_2=4$. Il existe $(\lambda,\upsilon)\in\mathbb{R}^2$ tels que, pour tout entier n,
$$v_n=\lambda r_1^n+\mu r_2^n$$

On calcule λ et μ avec $v_0 = \ln u_0 = 0 = \lambda + \mu$ et $v_1 = \ln 2 = \lambda r_1 + \mu r_2 = \mu (r_2 - r_1) = \dfrac{7\mu}{2}$. En conclusion

$$v_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n = \frac{2\ln 2}{7}\left(4^n - \frac{1}{2^n}\right) \text{ et } u_n = \exp\left(\frac{2\ln 2}{7}\left(4^n - \frac{1}{2^n}\right)\right) = 2^{\frac{2}{7}\left(4^n - \frac{1}{2^n}\right)}$$

Exercice 4

Soient $(a,b) \neq (0,0) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = (a+b)\,u_{n+1} - ab u_n$. Déterminer une expression de u_n en fonction de n. Lorsque $a \neq b$, on donnera deux expressions pour u_n.

Solution : Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est $r^2 - (a+b)\,r + ab = 0$. Les racines de l'équation caractéristique sont a et b. On a donc deux cas.
Si $a \neq b$, alors $\exists\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda a^n + \mu b^n$. Puisque $u_0 = 0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = 1 = \lambda a + \mu b$, on obtient

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda a + \mu b = 1 \end{cases} \underset{\text{Cramer}}{\iff} \lambda = \frac{1}{a-b}, \mu = -\frac{1}{a-b}$$

Ainsi

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

Si $a = b$, alors $\exists\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda n + \mu)\,a^n$. Puisque $u_0 = 0 = \mu$ et $u_1 = 1 = (\lambda + \mu)\,a = \lambda a$, on obtient

$$u_n = n a^{n-1}$$

Remarque : Si $a = b$, on a $\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k = n a^{n-1}$. Si $a = b = 0$, alors $u_n = 0$ pour $n \geqslant 2$.

Exercice 5

On considère la suite de polynôme $P_n(x)$ définie par

$$\begin{aligned} \forall x &\in \mathbb{R},\ P_0(x) = 0,\ P_1(x) = a \\ P_{n+2}(x) &= x P_{n+1}(x) + (1-x)\,P_n(x) \end{aligned}$$

Déterminer $P_n(x)$ en fonction de x.

Solution : Soit a fixé dans $\mathbb{R}$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = P_n(a)$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique est $r^2 - ar + (a-1) = 0$ dont les racines évidentes sont 1 et $a-1$ (on peut aussi calculer $\Delta = a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2$). On a donc deux cas :
Premier cas $1 \neq a - 1 \iff a \neq 2$
On sait qu'il existe λ et μ réels tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda \times 1^n + \mu \times (a-1)^n$. Or $u_0 = 0 \Longrightarrow \lambda + \mu = 0$ et $u_1 = a \Longrightarrow \lambda + (a-1)\,\mu = a$. On a donc le système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + (a-1)\,\mu = a \end{cases}$$

dont la solution est (immédiate) $\mu = \dfrac{a}{a-2} = -\lambda$ (oh ! oh ! le cas $a = 2$!). Ainsi

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{a}{a-2}\left((a-1)^n - 1\right) = \frac{a}{a-2}\left((a-2+1)^n - 1\right) = \frac{a}{a-2}\left[-1 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a-2)^k\right] \\ &= \frac{a}{a-2}\left[\sum_{k=\mathbf{1}}^{n} \binom{n}{k} (a-2)^k\right] \text{ car } \binom{n}{0}(a-2)^0 = 1 = \sum_{k=\mathbf{1}}^{n} \binom{n}{k} a\,(a-2)^{k-1} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\text{Pour } a \neq 2, \text{ on a } P_n(a) = \sum_{k=\mathbf{1}}^{n} \binom{n}{k} a(a-2)^{k-1} = \sum_{i=\mathbf{0}}^{n-1} \binom{n}{i+1} a(a-2)^i$$

Reste à déterminer $P_n(2)$, on dispose de deux méthodes :
Première méthode (bof, bof) : On résout la récurrence dans le cas $a = 2$. Il existe λ et μ tels que $u_n = (\lambda + \mu n) \times 1^n = \lambda + \mu n$. Avec $u_0 = 0 = \lambda$ et $u_1 = \lambda + \mu = 2$, on a

$$u_n = P_n(2) = 2n$$

Seconde méthode : La fonction P_n est continue donc $P_n(a) \underset{a\to 2}{\longrightarrow} P_n(2)$, or

$$P_n(a) = \sum_{i=\mathbf{0}}^{n-1} \binom{n}{i+1} a(a-2)^i = \underbrace{\binom{n}{1} a(a-2)^0}_{=na} + \underbrace{\binom{n}{2} a(a-2)^1 + \cdots}_{\underset{a\to 2}{\longrightarrow} 0}$$

Donc $P_n(a) \underset{a\to 2}{\longrightarrow} 2n = P_n(2)$.

Exercice 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2^n - 3u_n$. Comment choisir u_0 pour que la suite soit croissante ?

Solution : On va déterminer u_n en fonction de n. On commence par chercher une solution particulière de la récurrence sous la forme $u_n = \alpha 2^n$. On a alors $u_{n+1} = \alpha 2^{n+1} = 2\alpha \times 2^n$ et $2^n - 3u_n = 2^n - 3\alpha \times 2^n = (1 - 3\alpha) \times 2^n$, ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2^n - 3u_n$ si et seulement si

$$2\alpha = 1 - 3\alpha \iff \alpha = \frac{1}{5} \text{ soit } u_n = \frac{2^n}{5}$$

On pose alors $a_n = \dfrac{2^n}{5}$ et $u_n = a_n + v_n$, on a alors

$$u_{n+1} = 2^n - 3u_n \iff a_{n+1} + v_{n+1} = 2^n - 3a_n - 3v_n \iff v_{n+1} = -3v_n$$

En effet $a_{n+1} = 2^n - 3a_n$ (la suite $(a_n)_n$ est une solution particulière de la récurrence, avez-vous l'analogie avec les équations différentielles). La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique, d'où $v_n = (-3)^n v_0$ avec $u_0 = a_0 + v_0 = \dfrac{1}{5} + v_0 \Longrightarrow v_0 = a_0 - \dfrac{1}{5}$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2^n}{5} + \left(a_0 - \frac{1}{5}\right) \times (-3)^n$$

Lorsque n tend vers l'infini, on a

$$u_n \sim \left(a_0 - \frac{1}{5}\right) \times (-3)^n \text{ pour } a_0 \neq \frac{1}{5}$$

Ainsi $u_{n+1} \sim -3u_n \Longrightarrow u_n u_{n+1} \sim -3u_n^2 < 0$, ce qui prouve que u_{n+1} et u_n sont, pour n assez grand, de signe opposé, la suite ne peut être monotone
Reste le cas où $a_0 = \dfrac{1}{5}$ qui donne la suite croissante $u_n = \dfrac{2^n}{5}$.