Chapitre 11 : Suites réelles

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} k$.

1. Montrer que $k < 1 \Longrightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. Montrer que $k > 1 \Longrightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Solution : Avant tout, remarquons que l'on ne peut pas conclure si $k = 1$.

1. Traduisons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geqslant \mathbb{N} \Longrightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - k\right| \leqslant \varepsilon$$

Pour ε tel que $k' = k + \varepsilon < 1$, par exemple $k' = \dfrac{1+k}{2} \Longleftrightarrow \varepsilon = \dfrac{1-k}{2} > 0$, il existe un rang N_0 tel que $n \geqslant N_0 \Longrightarrow k - \varepsilon = \dfrac{k}{2} \leqslant \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k + \varepsilon = k'$.
On a alors pour $n \geqslant N_0 + 1$

$$\prod_{k=N_0+1}^{n} \frac{u_k}{u_{k-1}} = \underbrace{\frac{u_n}{u_{n-1}}}_{\leqslant k'} \times \underbrace{\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}}_{\leqslant k'} \times \cdots \times \underbrace{\frac{u_{N_0+1}}{u_{N_0}}}_{\leqslant k'} = \frac{u_n}{u_{N_0}}$$

Ainsi $0 \leqslant \dfrac{u_n}{u_{N_0}} \leqslant (k')^{n-N_0}$ d'où

$$\forall n > N_0,\ 0 \leqslant u_n \leqslant A\,(k')^n \text{ où } A = (k')^{-N_0}\, u_{N_0} \in \mathbb{R}_+$$

En passant à la limite, on a $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2. On a de même avec ε tel que $k' = k - \varepsilon > 1$, par exemple $\varepsilon = \dfrac{k-1}{2} > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_0 \Longrightarrow k' \leqslant \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. On a alors

$$\frac{u_n}{u_{N_0}} = \underbrace{\frac{u_n}{u_{n-1}}}_{\geqslant k'} \times \underbrace{\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}}_{\geqslant k'} \times \cdots \times \underbrace{\frac{u_{N_0+1}}{u_{N_0}}}_{\geqslant k'}$$

d'où $u_n \geqslant A\,(k')^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq -1$.

1. Montrer que $\dfrac{u_n}{1+u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Longrightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. On suppose que $\dfrac{u_n}{1+u_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Est-ce encore vrai si on enlève l'hypothèse $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée ?

Solution :

1. Posons $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$, alors $u_n = \dfrac{v_n}{1-v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, la suite $\varepsilon_n = 1 + u_n^2$ aussi. Posons $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$, alors $u_n = v_n \times \varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (produit d'une bornée par une qui tend vers 0).
Si on enlève l'hypothèse $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, c'est faux, prendre $u_n = n$ par exemple.

Exercice 3

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles vérifiant $u_n+v_n+w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3a$ et $u_n^2+v_n^2+w_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3a^2$.

Montrer que ces trois suites convergent vers a.

Solution : Posons $U_n = u_n - a,\ V_n = v_n - a$ et $W_n = w_n - a$. On sait déjà que

$$\begin{aligned} U_n + V_n + W_n &= u_n + v_n + w_n - 3a \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ U_n^2 + V_n^2 + W_n^2 &= u_n^2 + v_n^2 + w_n^2 - 2a\,(u_n + v_n + w_n) + 3a^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3a^2 - 2a \times 3a + 3a^2 = 0 \end{aligned}$$

Pour conclure, on a

$$0 \leqslant U_n^2 \leqslant U_n^2 + V_n^2 + W_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Longrightarrow U_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Longrightarrow |u_n - a| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Longrightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$$

Par symétrie des rôles, on a aussi $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Exercice type 1

Soit $x \in \mathbb{R}$, déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$.

Solution : On a pour $\forall k \in \{1, \cdots, n\}$,

$$kx - 1 < E(kx) \leqslant kx$$

en sommant ces inégaités, il vient

$$x\frac{n\,(n+1)}{2} - n = \sum_{k=1}^{n} (kx - 1) < \sum_{k=1}^{n} E(kx) \leqslant \sum_{k=1}^{n} kx = x\frac{n\,(n+1)}{2}$$

ainsi

$$\frac{x}{2} \xleftarrow[n\to+\infty]{} x\frac{(n+1)}{2n} - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant x\frac{(n+1)}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x}{2}$$

Par le théorème d'encadrement, on a $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{x}{2}$.

Exercice type 2

Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$, quelle est la nature de $(u_n)_n$?

Solution : On commence par majorer la suite, $\forall k \in \{1, \cdots, n\}$, on a $\dfrac{1}{n+k} \leqslant \dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n}$, en sommant ces inégalités, il vient $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$. donc $(u_n)_n$ est majorée. Puis

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{i=2}^{n+2} \frac{1}{n+i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \text{ (avec } i = k+1) \\ &= \frac{1}{n+n+2} + \frac{1}{n+n+1} + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{n+i} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0 \end{aligned}$$

Si vous avez du mal avec les changements d'indices :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \right)$$

La suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée, elle converge (cela ne donne pas la limite).

Exercice type 3

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $u_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \left(2 - \frac{k}{2n} \right)$ montrer que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

Solution : Si $n \geqslant 2$, alors $2n - 1 > n$ et

$$u_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \left(2 - \frac{k}{2n} \right) = \prod_{k=1}^{n} \left(2 - \frac{k}{2n} \right) \times \prod_{k=n+1}^{2n-1} \left(2 - \frac{k}{2n} \right)$$

Si $k \in \{1, \cdots, n\}$ alors

$$1 \leqslant k \leqslant n \Longrightarrow \frac{3}{2} = 2 - \frac{n}{2n} \leqslant 2 - \frac{k}{2n} \text{ et } n+1 \leqslant k \leqslant 2n-1 \Longrightarrow 1 = 2 - \frac{2n}{2n} \leqslant 2 - \frac{2n-1}{2n} \leqslant 2 - \frac{k}{2n}$$

Ainsi $u_n \geqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{3}{2} \right) \times \left(\prod_{k=n+1}^{2n-1} 1 \right) = \left(\frac{3}{2} \right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

Exercice type 4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour $n \geqslant 0$ par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$, on note $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. A partir de quel rang est-on sûr que u_n est une valeur approchée de sa limite à 10^{-2} près ?

Solution : On a $v_n - w_n = \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} - \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et est positif (donc $v_n \geqslant w_n$, ce qui donne une idée de la monotonie des suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, voir son cours ...)
On montre que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. En effet, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1} = -\frac{2}{(2n+3)(2n+1)} < 0$. On montre que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, en effet $w_{n+1} - w_n = -\frac{1}{2n+4} + \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2(n+2)(n+1)} > 0$. Ainsi les deux suites sont bien adjacentes. On en déduit qu'elles convergent vers la même limite ℓ. Puisque les suites de rangs pairs et impairs de

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ, on peut affirmer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
De plus, on a pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n \leqslant \ell \leqslant v_n$ d'où

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant v_n - \ell \leqslant v_n - w_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \leqslant \frac{2}{2n+1} \\ 0 &\leqslant \ell - w_n \leqslant v_n - w_n \leqslant \frac{2}{2n+1} \end{aligned}$$

Ainsi

$$0 \leqslant u_{2n} - \ell \leqslant \frac{2}{2n+1} \leqslant \frac{2}{2n} \text{ et } 0 \leqslant \ell - u_{2n+1} \leqslant \frac{2}{2n+1}$$

ce qui prouve que

$$\forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant |u_p - \ell| \leqslant \frac{2}{p}$$

Pour que $0 \leqslant |u_p - \ell| \leqslant 10^{-2}$, il suffit d'avoir $\dfrac{2}{p} \leqslant 10^{-2} \iff p \geqslant 200$.

Exercice type 5

Montrer que les suites définies pour $n \geqslant 1$, par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ sont adjacentes. On note ℓ la limite commune, montrer que $1 - 2\sqrt{2} \leqslant \ell \leqslant -1$. Comment suffit-il de choisir n pour que u_n soit une valeur approchée de la limite commune à 10^{-2} près ?

Solution : On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1} = \frac{(2n+3) - 2\sqrt{(n+1)(n+2)}}{\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{(2n+3)^2 - 4(n+1)(n+2)}{D} = \frac{1}{D} \geqslant 0 \text{ où } D = \sqrt{n+1} \times \left((2n+3) + 2\sqrt{(n+1)(n+2)}\right) \end{aligned}$$

Petite remarque de calcul : $4(n+1)(n+2) = (2n+2)(2n+4) = (2n+3-1)(2n+3+1) = (2n+3)^2 - 1$.
Puis

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{2\sqrt{n(n+1)} - (2n+1)}{\sqrt{n+1}}$$

On constate que le numérateur de $v_{n+1} - v_n$ est égal à l'opposé du numérateu de $u_{n+1} - u_n$ lorsqu'on remplace n par $n-1$. Ainsi $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$.
On a donc montré que la suite $(u_n)_n$ est croissante alors que $(v_n)_n$ est décroissante. Enfin

$$v_n - u_n = 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Les deux suites sont adjacentes. Soit ℓ la leur limite, alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$$

En particulier

$$u_1 = 1 - 2\sqrt{2} \leqslant \ell \leqslant v_1 = -1$$

Puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n \Longrightarrow 0 \leqslant l - u_n \leqslant v_n - u_n = \dfrac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Pour que u_n soit une valeur approchée (par défaut) à 10^{-2} près, il suffit donc d'avoir

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 10^{-2} \iff 10^2 \leqslant \sqrt{n} \iff 10\ 000 \leqslant n.$$

Pour info, $\ell \simeq -1,46035450....$ alors que $u_{10000} \simeq -1,4653546\cdots$, la convergence est très, très lente !
Remarque : Pour $n \geqslant 10000$, le terme v_n est une valeur approchée de ℓ par excès car $0 \leqslant v_n - \ell \leqslant v_n - u_n$. On peut encore améliorer l'approximation en prenant le milieu. En effet, on a

$$\left|\frac{u_n+v_n}{2}-\ell\right| \leqslant \frac{v_n-u_n}{2} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Il suffit donc de prendre $\dfrac{10^2}{2} \leqslant \sqrt{n} \Longleftrightarrow n \geqslant 2500$ pour que $\dfrac{u_n+v_n}{2}$ soit une valeur approchée de ℓ.
L'inégalité $\left|\dfrac{u_n+v_n}{2}-\ell\right| \leqslant \dfrac{v_n-u_n}{2}$ provient de

$$\left.\begin{array}{c} -(v_n-u_n) \leqslant u_n-\ell \leqslant 0 \\ 0 \leqslant v_n-\ell \leqslant v_n-u_n \end{array}\right\} \underset{\text{Somme des inég}}{\Longrightarrow} -(v_n-u_n) \leqslant (u_n+v_n)-2\ell \leqslant v_n-u_n$$

Exercice type 6

Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, l'équation $x^n + x^2 = 1$ admet une unique solution x_n positive. Montrer que la suite $(x_n)_n$ est convergente et préciser sa limite.

Solution : La fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x) = x^n + x^2 - 1$ est continue, strictement croissante (car par exemple $f_n'(x) = nx^{n-1} + 2x > 0$ si $x > 0$). Elle réalise donc une bijection de $[0,+\infty[$ sur $\left[f_n(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\right[= [-1,+\infty[$. Ceci assure l'existence et l'unicité de x_n. Puisque $f_n(1) = 1 > 0$, on a $x_n \in]0,1[$. La suite est donc bornée. De plus $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + x^2 - 1$ et $f_n(x_n) = x_n^n + x^2 - 1 = 0$, ainsi

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - x_n^n = x_n^n(x_n - 1) < 0 \text{ car } x_n \in]0,1[$$

On en déduit que $x_{n+1} > x_n$ (car f_{n+1} est croissante et $f_{n+1}(x_n) < 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$). La suite $(x_n)_n$ est donc croissante et majorée, elle converge. Notons l sa limite. On a

$$x_n \in]0,1[\text{ et } x_n^n = 1 - x_n^2 \Longrightarrow \ln(x_n^n) = n\ln(x_n) = \ln\left(1-x_n^2\right) \text{ (les ln existent)}$$

Puisque $(x_n)_n$ est croissante, on a $0 < x_1 \leqslant x_n < 1 \Longrightarrow 0 < x_1 < l \leqslant 1$. Supposons que $0 < l < 1$, alors $n\ln(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ et $\ln\left(1-x_n^2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\left(1-l^2\right)$, absurde donc

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Remarque : On peut vous poser la question suivante (après tout c'est ce qui a été posé à l'oral de Centrale $\cdots$) : Déterminer un équivalent de $1 - x_n$. On pose donc $x_n = 1 - u_n$, on a donc $n\ln(x_n) = \ln\left(1-x_n^2\right) \Longleftrightarrow n\ln(1-u_n) = \ln(u_n) + \ln(1+x_n)$. Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$, on a $n\ln(1-u_n) \sim -nu_n$ et $\ln(u_n) + \ln(1+x_n) \sim \ln u_n$ car $\ln u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ et $\ln(1+x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2$, ce qui donne

$$-nu_n \sim \ln u_n \Longleftrightarrow u_n \sim -\frac{\ln u_n}{n}$$

Mais, on a également $n \sim \dfrac{-\ln(u_n)}{u_n}$ et puisque n tend vers l'infini, on peut passer au ln pour obtenir $\ln n \sim \ln(-\ln(u_n)) - \ln(u_n)$. Pour conclure, on a

$$\begin{aligned} \ln(-\ln(u_n)) &= o(\ln u_n), \text{ en effet } \frac{\ln(-\ln u_n)}{-\ln u_n} = \frac{\ln v_n}{v_n} \text{ et } v_n = -\ln u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \\ &\text{donc } \frac{\ln(-\ln u_n)}{-\ln u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ (croissances comparées)} \end{aligned}$$

Ceci prouve que $\ln n \sim -\ln(u_n)$ et par conséquent

$$u_n \sim -\frac{-\ln n}{n} = \frac{\ln n}{n} \Longrightarrow x_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

Exercice type 7

Etudier la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in]0,+\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \dfrac{1}{u_n})$.

Solution : C'est une suite récurrente du type "$u_{n+1} = f(u_n)$". On pose $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$, alors si $x > 0$, on a $f(x) - 1 = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x} = \dfrac{(x-1)^2}{2x} \geqslant 0$. On en déduit que

$$x \geqslant 1 \Longrightarrow f(x) \geqslant 1, \text{ l'intervalle } [1,+\infty[\text{ est stable par } f$$

Si $u_0 \geqslant 1$, par récurrence sur n, on a $u_n \geqslant 1$. Si $u_0 \in]0,1[$, alors $f(u_0) = u_1 \geqslant 1$ et par récurrence sur n, on a $u_n \geqslant 1$ si $n \geqslant 1$. On en déduit que

$$\forall n \geqslant 1, u_n \geqslant 1.$$

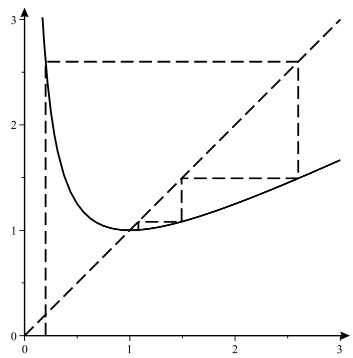
Puis

$$\forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) - u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_n} - u_n\right) = \frac{1 - u_n^2}{2u_n} \leqslant 0$$

La suite est donc décroissante et minorée par 1 à partir du rang 1, elle converge. Soit l sa limite, alors $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \dfrac{1}{u_n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}\left(l + \dfrac{1}{l}\right)$. Donc

$$l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{1}{l}\right) \Longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(l + \frac{1}{l}\right) - l = 0 \Longleftrightarrow \frac{1 - l^2}{2l} = 0 \Longleftrightarrow l = 1 \text{ ou } l = -1$$

Mais $u_n \geqslant 1 \Longrightarrow \lim u_n \geqslant 1$, ce qui impose $l = 1$. Conclusion $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.



Exercice 4

On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$. Etudier cette suite.

Solution : C'est une suite récurrente du type "$u_{n+1} = f(u_n)$" où $f(x) = xe^{-x}$. Par récurrence immédiate on a $u_n > 0$. Puis $u_{n+1} - u_n = u_n e^{-u_n} - u_n = u_n(e^{-u_n} - 1)$. Puisque $u_n > 0$, on a $e^{-u_n} - 1 < 0$ ce qui prouve que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par 0 donc converge. Soit ℓ sa limite, alors $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $u_n e^{-u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, le passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ donne

$$\ell = \ell e^{-\ell} \iff \ell\left(1 - e^{-\ell}\right) = 0 \iff \left\{\ell = 0 \text{ ou } 1 = e^{-\ell} \iff \ell = 0\right.$$

Conclusion $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Remarque : On a $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{e^{u_n}}{u_n} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{e^{u_n} - 1}{u_n} \sim \dfrac{u_n}{u_n} = 1$ car $e^{u_n} - 1 \sim u_n$ si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Avec Césaro, on en déduit que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) = \frac{1}{nu_n} - \frac{1}{nu_0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \Longrightarrow \frac{1}{nu_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \Longrightarrow u_n \sim \frac{1}{n}$$