Chapitre 12 : Continuité

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée et telle que $f(x+1) - f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell > 0$. Montrer que $\ell = 0$.

Solution : On sait que $f(x+1) - f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$, il existe donc $A > 0$ tel que $x \geqslant A \Longrightarrow f(x+1) - f(x) \geqslant \dfrac{\ell}{2}$ (il suffit d'écrire la définition de $f(x+1) - f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$ avec $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2}$). On a alors

$$\begin{aligned} f(A+1) - f(A) &\geqslant \frac{\ell}{2} \\ f(A+2) - f(A+1) &\geqslant \frac{\ell}{2} \\ &\vdots \\ f(A+n) - f(A+n-1) &\geqslant \frac{\ell}{2} \end{aligned}$$

En sommant, on obtient

$$f(A+n) \geqslant n\frac{\ell}{2} + f(A) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Absurde car f est bornée.
Si $\ell < 0$, on pose $g(x) = -f(x)$, alors $g(x+1) - g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\ell > 0$ et g est bornée.
Si $\ell = +\infty$, il existe A tel que $x \geqslant A \Longrightarrow f(x+1) - f(x) \geqslant 1$, on a alors $f(A+n) \geqslant n + f(A) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Enfin si $\ell = -\infty$, on pose (encore) $g(x) = -f(x)$.

Exercice 2

La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x} - \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ admet-elle une limite en $x = 0$?

Solution : La réponse est non. Il suffit de prendre deux suites dont la limite est 0 et telle que les images par f ont des limites différentes (ou n'ont pas de limites). Soit $(u_n)_n$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$, alors $f(u_n) = n+1 - \lfloor n+1 \rfloor = 0$ et $(v_n)_n$ définie par $v_n = \dfrac{1}{n+\frac{1}{2}}$ alors $f(v_n) = n + \frac{1}{2} - \left\lfloor n + \frac{1}{2} \right\rfloor = \frac{1}{2}$. On a bien

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Alors que

$$f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } f(v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

La fonction f n'a donc pas de limite en $x = 0$.

Exercice type 1

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Déterminer f.

Solution : Avec $x = y = 0$, on obtient $f(0+0) = 2f(0)$ d'où $f(0) = 0$. Puis avec $y = -x$, on obtient $f(0) = f(x) + f(-x)$, ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x) \qquad (1)$$

Avec $x \in \mathbb{R}$ et $y = x$, on obtient $f(x+x) = f(2x) = 2f(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, par récurrence immédiate, on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(nx) = nf(x) \qquad (2)$$

C'est vrai pour $n = 0$ (mais également pour $n = 1$ ou $n = 2$). Supposons que cela soit vrai à $n \geqslant 0$ fixé, alors avec $y = nx$, on obtient

$$f(x+nx) = f((n+1)x) = f(x) + f(nx) \underset{HR_n}{=} f(x) + nf(x) = (n+1)f(x)$$

En combinant (1) et (2), ceci prouve que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$. On en déduit que c'est vrai si $n \in \mathbb{Z}$ car si $n < 0$, $f(nx) \underset{(1)}{=} -f(-nx) \underset{(2) \text{ car } -n\in\mathbb{N}}{=} -(-n)f(x) = nf(x)$.

Pour $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$\begin{array}{ccc} f(q\times r) & = & qf(r) \\ \| & & \\ f(p) & = & pf(1) \end{array} \Longrightarrow f(r) = \frac{p}{q}f(1) = rf(1)$$

d'où

$$\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = rf(1)$$

Pour conclure si $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(r_n)_n$ de rationnels telle que $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. On a alors

$$\begin{array}{rcl} f(r_n) & = & r_n f(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} xf(1) \\ & & \text{et } f(r_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) \ \text{ car } f \text{ est } \textbf{continue} \text{ en } x \end{array}$$

Par unicité de la limite

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xf(1)$$

La fonction f est donc linéaire.
Synthèse : Les fonctions linéaires $f : x \longmapsto \alpha x$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifient bien $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (elles sont linéaires !).

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(2x)$. Soit $a \in \mathbb{R}$, on pose $u_n = f\left(\dfrac{a}{2^n}\right)$, que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? En déduire f.

Solution : Il est évident que $\dfrac{a}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, la fonction f etant continue en $x = 0$, on a $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f(0)$ et ainsi

$$u_n = f\left(\frac{a}{2^n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$$

On exploite ensuite la relation fonctionnelle sur f qui donne

$$u_n = f\left(\frac{a}{2^n}\right) = f\left(2 \times \frac{a}{2^n}\right) = u_{n-1} \text{ si } n \geqslant 1$$

La suite u est donc constante. On en déduit que

$$u_0 = f(a) = \lim_{n\to+\infty} u_n = f(0)$$

La fonction f est donc constante (égale à $f(0)$!).
Remarque : Il existe d'autres fonctions (non continue en $x = 0$) qui vérifient $f(x) = f(2x)$, par exemple $1_{\mathbb{Q}}$ définie par $1_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$.

Exercice 4

Soit f définie sur $I = [1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor^{x}}$.

1. Montrer que f est continue à droite en tout point de I. Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$, quelle est la limite à gauche de f en p ? La fonction f est-elle continue à gauche en tout point de I ?
2. Calculer les limites des suites $(f(u_n))_n$ lorsque $^{(a)}$ $u_n = n$, $^{(b)}$ $u_n = n + \frac{1}{2}$, $^{(c)}$ $u_n = n + \dfrac{1}{\ln n}$.
3. Soit $a \in [0, 1]$, montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Solution :

1. On sait que la fonction partie entière est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ et est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$. Par définition de f, on a
$$f(x) = \frac{\exp(\lfloor x \rfloor \ln x)}{\exp(x \ln(\lfloor x \rfloor))} \text{ est définie sur } I$$
est continue à droite sur $\mathbb{R}$. Soit $p \geqslant 2$, la limite à gauche en p de $\lfloor x \rfloor$ est $p-1$, ainsi
$$f(x) \xrightarrow[x\to p^-]{}= \frac{p^{p-1}}{(p-1)^p}$$
Or $f(p) = 1$, ainsi f continue à gauche en p si et seulement si
$$\frac{p^{p-1}}{(p-1)^p} = 1 \iff (p-1)\ln p = p \ln(p-1) \iff \frac{\ln p}{p} = \frac{\ln(p-1)}{p-1}$$
On étudie donc la fonction φ définie sur $[1, +\infty[$ par $\varphi(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Sa dérivée est $\varphi'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$. Elle est donc strictement décroissante sur $[e, +\infty[$, la seule possibilité est donc $p = 3$ qui ne convient pas !
Conclusion f n'est pas continue à gauche en $x = p \geqslant 2$ (mais elle l'est sur $[1, +\infty[\setminus\{2, 3, \cdots\}$, en particulier f est continue en $p = 1$).
2. On a
$$f(n) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$
Puis en utilisant $\lfloor n + \frac{1}{2} \rfloor = n$, on a
$$\begin{aligned} f\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^n}{\sqrt{n} \times n^n} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n, \\ \text{or } \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n &= \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{e} \end{aligned}$$
car $\ln\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right) \sim \dfrac{1}{2n}$. Donc
$$f\left(n + \frac{1}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
On peut donc affirmer que f n'a pas de limite en $+\infty$.
Enfin, si $n \geqslant 3$, on a $\left\lfloor n + \dfrac{1}{\ln n} \right\rfloor = n$ car $\ln n > 1$, d'où
$$f\left(n + \frac{1}{\ln n}\right) = \frac{\left(n + \frac{1}{\ln n}\right)^n}{n^{n + \frac{1}{\ln n}}} = \frac{\left(n + \frac{1}{\ln n}\right)^n}{n^{\frac{1}{\ln n}} \times n^n} = \frac{1}{n^{\frac{1}{\ln n}}} \left(1 + \frac{1}{n \ln n}\right)^n$$
Mais
$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n\ln n}\right)^n &= \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n \ln n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \text{ car } n\ln\left(1 + \frac{1}{n\ln n}\right) \sim n \times \frac{1}{n \ln n} = \frac{1}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ \text{et } n^{\frac{1}{\ln n}} &= \exp\left(\frac{\ln n}{\ln n}\right) = e \end{aligned}$$

d'où

$$f\left(n+\frac{1}{\ln n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1}$$

3. On s'inspire de la dernière en posant pour $k \geqslant 0$, $u_n = n+\dfrac{k}{\ln n}$, alors pour n grand (tel que $\dfrac{k}{\ln n} < 1$), $\left\lfloor n+\dfrac{k}{\ln n}\right\rfloor = n$ et

$$f\left(n+\frac{k}{\ln n}\right) = \frac{\left(n+\frac{k}{\ln n}\right)^n}{n^{n+\frac{k}{\ln n}}} = \frac{1}{n^{\frac{k}{\ln n}}}\left(1+\frac{k}{n\ln n}\right)^n = e^{-k}\left(1+\frac{k}{n\ln n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-k}$$

On pose alors pour $a \neq 0$, $e^{-k} = a \Longleftrightarrow k = -\ln a$. Il reste le cas où $a = 0$, mais on a vu que $f\left(n+\dfrac{1}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Il existe donc une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ pour tout $a \in [0,1]$.

Exercice 5

Soit f croissante et majorée sur $[1,+\infty[$. On suppose que $\varphi(x) = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ est croissante sur $]1,+\infty[$, montrer que f est constante.

Solution : Puisque f est croissante et majorée, elle admet une limite ℓ en $+\infty$. On a alors $\varphi(x) = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ car $f(x)-f(1) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell-1$. S'il existe x_0 tel que $\varphi(x_0) > 0$, par croissance de φ, on a $\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)$ et par passage à la limite $0 = \lim\limits_{+\infty}\varphi \geqslant \varphi(x_0) > 0$, absurde.
Bref, on a $\varphi(x) \leqslant 0$, mais f est aussi croissante donc $\varphi(x) \geqslant 0$ (car $f(x) \geqslant f(1)$), bref $\varphi(x) = 0$ et f constante.

Exercice type 2

Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue, montrer que $\exists x_0 \in [0,1]\,,\ f(x_0) = x_0$.

Solution : Il s'agit de prouver que l'application g définie par $g(x) = f(x) - x$ s'annule sur $[0,1]$. L'application g est **continue** sur $[0,1]$. On a

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0) - 0 \geqslant 0 \text{ car } f(0) \in [0,1] \\ g(1) &= f(1) - 1 \leqslant 0 \text{ car } f(1) \in [0,1] \end{aligned}$$

d'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule au moins une fois sur $[0,1]$. Il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $g(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0$.

Exercice type 3

Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de f définie par $f(x) = \lfloor x\rfloor + (x - \lfloor x\rfloor)^2$.

Solution : On sait que la fonction partie entière est continue sur chaque intervalle de la forme $]p,p+1[$ où $p \in \mathbb{Z}$. Par somme et produit de fonctions continues, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ (i.e. sur $]p,p+1[$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$). Il reste à étudier le problème de la continuité en p. On a $f(p) = p + (p-p)^2 = p$. De plus

$$\lfloor x\rfloor \xrightarrow[x\to p^+]{} p \text{ et } E(x) \xrightarrow[x\to p^-]{} p-1$$

Si l'on désire le justifier, on a $\lfloor p+h\rfloor = p + \lfloor h\rfloor$ pour $p \in \mathbb{Z}$, doù

$$\begin{aligned} h &\in\ ]0,1[\Longrightarrow \lfloor h\rfloor = 0 \Longrightarrow \lfloor p+h\rfloor = p \text{ ainsi } \lfloor x\rfloor \xrightarrow[x\to p^+]{} p \\ h &\in\ ]-1,0[\Longrightarrow \lfloor h\rfloor = -1 \Longrightarrow \lfloor p+h\rfloor = p-1 \text{ ainsi } \lfloor x\rfloor \xrightarrow[x\to p^-]{} p-1 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} f(x) \xrightarrow[x\to p^+]{} p+(p-p)^2 &= p=f(p) \\ f(x) \xrightarrow[x\to p^-]{} (p-1)+(p-(p-1))^2 &= p=f(p) \end{aligned}$$

Ce qui permet d'affirmer que f est continue en $x=p$, et ainsi f est continue sur $\mathbb{R}$.
Remarque : La continuité à droite en $x=p$ était immédiate car $x\longmapsto \lfloor x\rfloor$ est continue à droite en $x=p\in\mathbb{Z}$. Le seul problème était en p^-.

Exercice type 4

Montrer que $\forall t\geqslant 1$, $e^{-t^2}\leqslant \dfrac{1}{t^2}$. On pose $F(x)=\displaystyle\int_1^x e^{-t^2}dt$, montrer que F admet une limite en $+\infty$. Que dire de $G(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$?

Solution : Soit $\varphi(t)=t^2e^{-t^2}$, alors $\varphi'(t)=2te^{-t^2}\left(1-t^2\right)$, on a donc un maximum sur $[0,+\infty[$ qui vaut $\varphi(1)=e^{-1}<1$. On en déduit que pour $x\geqslant 1$

$$F(x)=\int_1^x e^{-t^2}dt\leqslant\int_1^x\frac{dt}{t^2}=1-\frac{1}{x}\leqslant 1$$

Ainsi F est majorée sur $[1,+\infty[$, croissante car $F'(x)=e^{-x^2}\geqslant 0$ donc admet une limite en $+\infty$.
Pour finir $G(x)=F(x)-F(0)$ (bah oui, F est une primitive de $f(x)=e^{-x^2}$) donc admet aussi une limite en $+\infty$.

Exercice 6

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ continue et telle que $f(x+1)-f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ell\in\mathbb{R}$. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ell$.

Solution : On commence par se ramener à 0, on pose $g(x)=f(x)-\ell x$, ainsi $g(x+1)-g(x)=f(x+1)-f(x)-\ell\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.
Soit $\varepsilon>0$, il existe $A>0$ tel que $x\geqslant A\Longrightarrow |g(x+1)-g(x)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $x\geqslant A$, il exite un unique entier n tel que $x-n-1<A\leqslant x-n\Longleftrightarrow n\leqslant x-A<n+1$; cet entier vaut $n=\lfloor x-A\rfloor$. On a alors

$$\begin{aligned} g(x) &= g(x)-g(x-1)+g(x-1)-g(x-2)+\cdots+g(x-n+1)-g(x-n)+g(x-n) \\ &= g(x-n)+\sum_{k=0}^{n-1}\left(g(x-k)-g(x-k-1)\right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$|g(x)|\leqslant|g(x-n)|+\sum_{k=0}^{n-1}|g(x-k)-g(x-k-1)|$$

Or pour $k\leqslant n-1$, $x-k-1\geqslant A$ donc $|g(x-k)-g(x-k-1)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$. On a donc

$$|g(x)|\leqslant|g(x-n)|+n\frac{\varepsilon}{2}\leqslant|g(x-n)|+x\frac{\varepsilon}{2}\text{ car } n\leqslant x-A\leqslant x$$

Puisque g est continue sur $[A,A+1]$ elle y est bornée, soit $M=\sup\limits_{[A,A+1]}|g|$, alors $|g(x-n)|\leqslant M$. Bref, on a donc

$$\left|\frac{g(x)}{x}\right|\leqslant\frac{M}{x}+\frac{\varepsilon}{2}$$

Or pour $x \geqslant B = \dfrac{2M}{\varepsilon}$, on a $\dfrac{M}{x} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, donc pour $x \geqslant \max(A, B)$, on a $\left|\dfrac{g(x)}{x}\right| \leqslant \varepsilon$. Ceci prouve que $\dfrac{g(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \iff \dfrac{f(x)}{x} - \ell \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$.

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ décroissante et telle que $f(x+1) + f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

1. Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f$ existe et préciser sa valeur.
2. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Solution : Avant tout, on a $f(x+1) + f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

1. Puisque f est décroissante, ou bien $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$, ou bien f a une limite ℓ en $+\infty$. Si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$, alors $f(x+1) + f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$, absurde. Donc $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$ et $f(x+1) + f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 2\ell$ d'où $\ell = 0$.
   Remarque : En particulier $f(x) \geqslant 0$ (car s'il existe x_0 tel que $f(x_0) < 0$, par croissance de f, on a $f(x) \leqslant \varphi(x_0)$ et par passage à la limite $0 = \lim\limits_{+\infty} f \leqslant f(x_0) < 0$, absurde).
2. On a alors, par décroissance de f
   $$2f(x+1) \leqslant f(x+1) + f(x) \leqslant 2f(x)$$
   d'où
   $$\frac{f(x+1) + f(x)}{2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{f(x) + f(x-1)}{2}$$
   ce qui donne
   $$\frac{x(f(x+1) + f(x))}{2} \leqslant xf(x) \leqslant \frac{x}{x-1}\frac{x(f(x) + f(x-1))}{2}$$
   par passage à la limite, il vient $xf(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{1}{2} \Longrightarrow f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.

   Remarque : La décroissance de f est essentielle, en effet si $f(x) = \dfrac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x}$ alors
   $$\begin{aligned} f(x+1) + f(x) &= \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)}{x+1} + \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x} = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x+1} + \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x} \\ &= \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} + \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x} = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x}\left(1 - \frac{1}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x} \end{aligned}$$
   et $xf(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.