Chapitre 13 : Dérivation

Exercice type 1

Soit $f(x) = x^x$, peut on prolonger f sur $\mathbb{R}_+$, le prolongement est-il dérivable sur $\mathbb{R}_+$?

Solution : On a $f(x) = \exp(x \ln x)$, par les croissances comparées, $x \ln x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, ainsi par continuité de exp en 0, il vient $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} e^0 = 1$. On pose donc $f(0) = 1$. Pour la dérivabilité, on a $\tau(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{e^{x \ln x} - 1}{x}$. Puisque $u = x \ln x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, on a $e^{x \ln x} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x \ln x$ et ainsi

$$\tau(x) \underset{x \to 0}{\sim} \ln x \xrightarrow[x \to 0]{} -\infty$$

La fonction n'est pas dérivable en $x = 0$ (tangente verticale).

Exercice type 2

Déterminer a et b réels pour que la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ si $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $f(x) = ax^2 + bx + 1$ si $x > 1$ soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution : Analyse : Si f est dérivable sur $]0, +\infty[$ elle y est continue, en particulier en $x = 1$, on a $f(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \sqrt{1} = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = a + b + 1$. Ainsi $a + b = 0$ est une condition nécessaire.
De plus, si f est dérivable en $x = 1$, on doit avoir $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$. Mais

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \underset{x = 1 - h}{=} \frac{\sqrt{1 - h} - 1}{-h} \underset{h \to 0}{\sim} \frac{1}{2} \text{ si } x < 1 \text{ (donc } h > 0) \\ \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \frac{ax^2 - ax}{x - 1} = ax \xrightarrow[x \to 1]{} a \text{ si } x > 1 \text{ (on a utilisé } b = -a) \end{aligned}$$

Ainsi $a = \dfrac{1}{2}$ (et $b = -\dfrac{1}{2}$) est une condition nécessaire.
Synthèse : avec $a = -b = \frac{1}{2}$ et $f(0) = 1$, d'après ce qui précède, on a f continue, dérivable en 1 avec $f'(1) = \frac{1}{2}$.

Exercice type 3

Soit f définie par $f(x) = x^{\frac{5}{2}} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0^+, est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, mais que $f''(0)$ n'existe pas.

Solution : Par les théorèmes généraux, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ (composée et produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$).
Pour $x > 0$, on a $f(x) = 0 + 0 \times x + 0 \times x^2 + x^2 \times \sqrt{x} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Puisque $\sqrt{x} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ (bornée $\times$ tend vers 0), on a $x^2 \times \sqrt{x} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = \underset{x \to 0}{o}(x^2)$. Ainsi f admet une $DL_2(0^+)$. En particulier f admet un $DL_1(0^+)$ donc $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ (le coefficient constant) donc f est continue en 0 et est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$ (coefficient devant x).
Si $x > 0$, on a $f'(x) = \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + x^{\frac{5}{2}} \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \sqrt{x} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$. La fonction dérivée f' est donc définie par

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \sqrt{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x > 0 \\ f'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Puisque $\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\sqrt{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\xrightarrow[x\to 0^+]{}0$ (chaque terme tend vers 0 en tant que produit d'une bornée par une fonction qui tend vers 0), on a bien

$$f'(x)\xrightarrow[x\to 0^+]{}f'(0)$$

Ainsi f' est continue en 0, ce qui signifie que f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.
En revanche

$$\tau(x)=\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\frac{5}{2}\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

vérifie $\tau\left(\frac{1}{2n\pi}\right)=-\sqrt{2n\pi}\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\infty$ donc n'a pas de limite en 0^+, ce qui prouve que $f''(0)$ n'existe pas.

Exercice type 4

Soit f dérivable en a, calculer $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(a+3h)-f^2(a-h)}{h}$.

Solution : On sait que f dérivable en a si et seulement si f admet un $DL_1(a)$ et ce DL est

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\underset{x\to 0}{o}(x-a)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
f(a+3h) &= f(a)+3hf'(a)+\underset{h\to 0}{o}(h)\Longrightarrow f^2(a+3h)=f(a)^2+6hf(a)f'(a)+\underset{h\to 0}{o}(h)\\
f^2(a-h) &= f(a)-hf'(a)+\underset{h\to 0}{o}(h)\Longrightarrow f^2(a-h)=f(a)^2-2hf(a)f'(a)+\underset{h\to 0}{o}(h)
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{f^2(a+3h)-f^2(a-h)}{h}=8f(a)f'(a)+\underset{h\to 0}{o}(1)\xrightarrow[h\to 0]{}8f(a)f'(a)$$

Exercice type 5

Soit h définie par $h(x)=\left(x^2+x+1\right)e^x$ et $n\in\mathbb{N}$, calculer $h^{(n)}(x)$.

Solution : Soit f et g définies par $f(x)=x^2+x+1$ et $g(x)=e^x$, f et g sont $\mathcal{C}^\infty$ donc $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que h l'est et que l'on peut appliquer la formule de Leibniz.
On a donc

$$\forall x\in\mathbb{R},\ h^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)\,g^{(n-k)}(x)$$

Or $f'(x)=2x+1$, $f''(x)=2$ et $f^{(k)}(x)=0$ si $k\geqslant 3$. Ainsi la somme $\sum_{k=0}^{n}$ se réduit à une somme de $k=0$ à $k=2$ (remarquons que si $n<2$, on ajoute des termes qui sont nuls, car les coefficients du binôme $\binom{n}{k}$ sont nuls lorsque $k>n$).
On a donc

$$\forall x\in\mathbb{R},\ h^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{\mathbf{2}}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)\,g^{(n-k)}(x)=\binom{n}{0}f^{(0)}(x)\,g^{(n-0)}(x)+\binom{n}{1}f^{(1)}(x)\,g^{(n-1)}(x)+\binom{n}{2}f^{(2)}(x)\,g^{(n-2)}(x)$$

Puisque $\forall p\in\mathbb{N}$, $g^{(p)}(x)=e^x$, il vient

$$\forall x\in\mathbb{R},\ h^{(n)}(x)=\left(x^2+x+1\right)e^x+n(2x+1)e^x+\frac{n(n-1)}{2}\times 2e^x=\left(x^2+(2n+1)x+n^2+1\right)e^x$$

On vérifie que pour $n=0$, on retrouve bien $h(x)$!

Exercice 1

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, cette fonction est clairement de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Montrer par récurrence qu'il existe un polynôme $P_n(X)$ tel que,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

et que

$$P_{n+1}(x) = \left(1+x^2\right) P_n'(x) - 2(n+1)\,x\,P_n(x)$$

Solution : Par récurrence sur n, on définit si $n \geqslant 0$, $\mathcal{P}_n$ = "il existe un polynôme P_n tel que ,$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$ ". $\mathcal{P}_0$ est vraie car $f(x) = \dfrac{P_0}{(1+x^2)^{0+1}}$ où $P_0 = 1$.

On suppose, à n fixé, $n \geqslant 0$, que $\mathcal{P}_n$ est vraie, alors $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$ donc

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= f^{(n)}(x)' = \left(\frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\right)' = \frac{P_n'(x)}{(1+x^2)^{n+1}} - \frac{2(n+1)\,xP_n(x)}{(1+x^2)^{n+2}} = \frac{\left(1+x^2\right)P_n'(x) - 2(n+1)\,x\,P_n(x)}{(1+x^2)^{n+2}} \\ &= \frac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+2}} \end{aligned}$$

où

$$P_{n+1}(x) = \left(1+x^2\right) P_n'(x) - 2(n+1)\,x\,P_n(x)$$

On vérifie que P_{n+1} est bien un polynôme car P_n en est un. Ce qui prouve le résultat demandé.

Exercice type 6

Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on a montré qu'il existe un polynôme P_n tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$.

En particulier, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(1+x^2\right) f'(x) + 2xf(x) = 0$. En dérivant cette relation n fois, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}(x) + 2(n+1)\,x\,P_n(x) + n(n+1)\left(1+x^2\right) P_{n-1}(x) = 0$$

Solution : f est C^∞ donc f et f' sont dérivables n fois sur $\mathbb{R}$.

On applique la formule de Leibniz à $h : x \longmapsto \left(1+x^2\right) f'(x)$ qui est un produit de fonctions dérivables n fois, en posant $u(x) = 1+x^2$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x)\, f'(x)^{(n-k)}$$

Puisque la dérivée k-ième de $\left(1+x^2\right)$ est nulle pour $k \geqslant 3$, cette somme se réduit à

$$\begin{aligned} \forall x &\in \mathbb{R},\ h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} u^{(k)}(x)\, f'(x)^{(n-k)} \\ &= \binom{n}{0} u^{(0)}(x)\, f'(x)^{(n-0)} + \binom{n}{1} u^{(1)} f'(x)^{(n-1)} + \binom{n}{2} u^{(2)}(x)\, f'(x)^{(n-2)} \\ &= \left(1+x^2\right) f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)\, f^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

On applique de même la formule de Leibniz à $g : x \longmapsto 2xf(x)$ (produit de fonctions n fois dérivables) pour obtenir avec $v(x) = 2x$ (la dérivée k-ième de v est nulle si $k \geqslant 2$)

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} v^{(k)}(x)\, f(x)^{(n-k)} = \binom{n}{0} v^{(0)}(x)\, f(x)^{(n-0)} + \binom{n}{1} v^{(1)}(x)\, f(x)^{(n-1)} \\ & 2xf^{(n)}(x) + 2nf^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $h+g=0$,

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \left(1+x^2\right)f^{(n+1)}(x)+2(n+1)xf^{(n)}(x)+n(n+1)f^{(n-1)}(x)=0$$

Or $f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(x)}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}$ d'où

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \left(1+x^2\right)\frac{P_{n+1}(x)}{\left(1+x^2\right)^{n+2}}+2(n+1)x\frac{P_n(x)}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}+n(n+1)\frac{P_{n-1}(x)}{\left(1+x^2\right)^{n}}=0$$

En multipliant par $\left(1+x^2\right)^{n+1}$, on obtient

$$\forall x\in\mathbb{R},\ P_{n+1}(x)+2(n+1)x\,P_n(x)+n(n+1)\left(1+x^2\right)P_{n-1}(x)=0$$

Exercice type 7

Montrer que $\forall x>0,\ \dfrac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln(x)<\dfrac{1}{x}$.

Solution : Soit f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(u)=\ln(u)$, pour $x>0$, f est définie, continue sur $[x,x+1]$, dérivable sur $]x,x+1[$. Le théorème des accroissements finis permet d'affirmer qu'il existe $u\in]x,x+1[$ tel que

$$\ln(x+1)-\ln(x)=f(x+1)-f(x)=f'(u)\times(x+1-x)=\frac{1}{u}$$

Mais

$$0<x<u<x+1\Longrightarrow\frac{1}{x+1}<\frac{1}{u}<\frac{1}{x}$$

Ainsi

$$\forall x>0,\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln(x)<\frac{1}{x}.$$

Exercice type 8

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, de classe C^2 sur $[a,b]$ et 3 fois dérivables sur $]a,b[$. On désire montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{2}\left(f'(a)+f'(b)\right)-\frac{(b-a)^3}{12}f^{(3)}(c)$$

On pose $\varphi(t)=f(t)-f(a)-\dfrac{t-a}{2}\left(f'(a)+f'(t)\right)+\dfrac{(t-a)^3}{12}K$ où K est tel que $\varphi(a)=\varphi(b)$.

1. Calculer $\varphi(a)$ et $\varphi'(a)$ (après avoir justifier que ϕ est dérivable).
2. A l'aide du théorème de Rolle, conclure.

Solution :

1. Puisque f est de classe C^2 sur $[a,b]$, f' est de classe C^1 sur $[a,b]$ et par les théorèmes généraux (produit et somme de fonctions $\mathcal{C}^1$), la fonction φ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. On a immédiatement $\varphi(a)=0$ et

$$\forall t\in[a,b],\ \varphi'(t)=f'(t)-\frac{1}{2}\left(f'(a)+f'(t)\right)-\frac{t-a}{2}f''(t)+\frac{(t-a)^2}{4}K$$

Ainsi $\varphi'(a)=0$.

2. La fonction φ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, puisque $\varphi(a)=\varphi(b)=0$, d'après le théorème de Rolle, il existe $d\in\,]a,b[$ tel que $\varphi'(d)=0$. La fonction φ' est continue sur $[a,b]$ (car φ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$), puisque f est 3 fois dérivable sur $]a,b[$, f'', et donc φ', est dérivable sur $]a,b[$. Puisque ,$\varphi'(a)=\varphi'(d)=0$, d'après le théorème de Rolle, il existe $c\in\,]a,d[\,\subset\,]a,b[$ tel que
$$\varphi''(c)=0$$
Or
$$\forall t\in[a,b],\ \varphi''(t)=f''(t)-\frac{1}{2}f''(t)-\frac{1}{2}f''(t)-\frac{t-a}{2}f^{(3)}(t)+\frac{t-a}{2}K=\frac{t-a}{2}\left(K-f^{(3)}(t)\right)$$
Ainsi
$$\varphi''(c)=0\Longleftrightarrow K=f^{(3)}(c)$$
On conclut en écrivant que K a été choisi de manière à avoir
$$\varphi(b)=f(b)-f(a)-\frac{b-a}{2}\left(f'(a)+f'(b)\right)+\frac{(b-a)^3}{12}K=f(b)-f(a)-\frac{b-a}{2}\left(f'(a)+f'(b)\right)+\frac{(b-a)^3}{12}f^{(3)}(c)=0$$
ce qui prouve que
$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{2}\left(f'(a)+f'(b)\right)-\frac{(b-a)^3}{12}f^{(3)}(c)$$
Remarque : En toute rigueur, on peut, lorsque l'on définit φ se poser la question suivante : Le nombre K existe-t-il ? La réponse est oui, il suffit de résoudre $f(b)-f(a)-\frac{b-a}{2}\left(f'(a)+f'(b)\right)+\frac{(b-a)^3}{12}K=0$ qui a une unique solution car $b\neq a$.

Exercice type 9

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=\cos(u_n)$. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\in[0,1]$, que la fonction cos est lipschtzienne sur $[0,1]$ et que l'équation $\cos x=x$ a une unique solution ℓ dans $[0,1]$. Montrer que $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell$.

Solution : Soit f la fonction cosinus, elle est strictement décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc sur $[0,1]$, ainsi
$$0\leqslant x\leqslant 1\Longrightarrow 0\leqslant\cos 1\leqslant f(x)\leqslant 1$$
On en déduit que l'intervalle $[0,1]$ est stable par f (l'intervalle I est dit stable par f si $x\in I\Longrightarrow f(x)\in I$). Puisque $u_0\in[0,1]$, par récurrence immédiate, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\in[0,1]$.
La fonction f est dérivable sur $[0,1]$ avec $f'(x)=-\sin x$. Par monotonie de sin sur $[0,1]$, on a
$$0\leqslant\sin x\leqslant\sin 1\Longrightarrow\forall x\in[0,1],\ |f'(x)|\leqslant\sin 1$$
Ainsi la fonction cos est $\sin 1-$lipsichtzienne sur $[0,1]$.
Soit $\varphi(x)=\cos x-x$, la fonction φ est continue sur $[0,1]$ et décroissante strictement (somme de fonctions strictement décroissantes), elle réalise donc une bijection de $[0,1]$ sur $[\varphi(1),\varphi(0)]=[\cos 1-1,1]$, puique $\cos 1-1<0$, il existe un unique $\ell\in[0,1]$ tel que $\varphi(\ell)=0\Longleftrightarrow\cos\ell=\ell$.
On peut maintenant conclure, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in[0,1]$ et $\ell\in[0,1]$ donc
$$|u_{n+1}-\ell|=|f(u_n)-f(\ell)|\leqslant\sin(1)\,|u_n-\ell|$$
Par récurrence on en déduit que
$$|u_n-\ell|\leqslant(\sin(1))^n\,|u_0-\ell|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\text{ car }0\leqslant\sin 1<1$$
Ce qui prouve que
$$u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell$$

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n^2}$.

1. Soit f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, déterminer $\sup\limits_{[0,+\infty[} |f'(x)|$. Que peut-on en déduire pour f ?
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution ℓ positive.
3. En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution :

1. La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$. Puisque , $f''(x) = 2\dfrac{3x^2-1}{(x^2+1)^3}$, on en déduit les variations de f' (faire un tableau) et ainsi
$$\sup_{[0,+\infty[} |f'| = \left|f'\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right| = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{8} < 1$$
En particulier, on en déduit que f est $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}-$lipshitzienne sur $[0,+\infty[$ (via le TAF).
2. On a $f(x) = x \iff x\left(1+x^2\right) = 1 \iff x^3+x-1 = 0$. La fonction φ définie par $\varphi(x) = x^3+x^2-1$ est continue, strictement croissante sur $[0,+\infty[$ (somme de fonctions strictement croissantes), d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $\left[\varphi(0), \lim\limits_{+\infty} \varphi(x)\right[= [-1,+\infty[$. En particulier, il existe un unique $\ell \in [0,+\infty[$ tel que $\varphi(\ell) = 0$.
3. Par récurrence immédiate, on a $u_n \geqslant 0$, soit $u_n \in [0,+\infty[$, on en déduit que, puisque u_n et ℓ sont $[0,+\infty[$
$$|u_{n+1}-\ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}|u_n-\ell|$$
et par récurrence immédiate que
$$|u_n-\ell| \leqslant \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^n |u_0-\ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ car } \frac{3\sqrt{3}}{8} < 1$$
Conclusion
$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Exercice 3

(Oral CCP) Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 |x-t|\,dt$, pour $u_0 \in\,]0,1[$, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que pour $x \in [0,1]$, on a $f(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{2}$. Déterminer $f(x)$ pour $x < 0$ puis pour $x > 1$.
2. La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, de classe $\mathcal{C}^2$? Calculer $f'(x)$ sur I est majorer $|f'|$ sur $I = \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right]$.
3. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $u_n \in I$, puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ que l'on précisera.
4. Que se passe-t-il si $u_0 > 1$?

Solution :

1. Pour $x \in [0,1]$, on a $f(x) = \int_0^x (x-t)\,dt + \int_x^1 (t-x)\,dt = x^2 - x + \frac{1}{2}$. Pour $x < 0$, on a $f(x) = \int_0^1 (t-x)\,dt = \frac{1}{2} - x$ et pour $x > 1$, $f(x) = \int_0^1 (x-t)\,dt = x - \frac{1}{2}$. Pour résumer

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - x & x < 0 \\ x^2 - x + \frac{1}{2} & x \in [0,1] \\ x - \frac{1}{2} & x > 1 \end{cases}$$

2. Dans l'intégrale qui définit $f(x)$, on pose $u = x - t$, ainsi $f(x) = -\int_x^{x-1} |u|\,du = \int_{x-1}^x |u|\,du$, puisque $u \longmapsto |u|$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ et que les fonctions $\alpha(x) = x$ et $\beta(x) = x+1$, on en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée égale à

$$f'(x) = |x| - |x-1|$$

en particulier f est de classe $\mathcal{C}^1$. Mais pas de classe $\mathcal{C}^2$. Sur I, on a

$$f'(x) = 2x - 1 \Longrightarrow |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$$

3. Sur $[0,1]$, on a $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$, c'est une parabole symétrique par rapport à $x = \frac{1}{2}$, le minimum est en $x = \frac{1}{2}$ et vaut $\frac{1}{4}$, le maximum en $x = 0$ ou $x = 1$ et vaut $\frac{1}{2}$. Par récurrence, on montre que $u_n \in I$. C'est vrai au rang $n = 1$ et si $u_n \in I \subset [0,1]$ alors $u_{n+1} \in I$.
Puisque $|f'| \leqslant \frac{1}{2}$ sur I, par le TAF (f est $\mathcal{C}^1$ sur I), on peut affirmer que f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur I. Soit $\ell \in I$ tel que $\ell = f(\ell) \Longleftrightarrow \ell^2 - \ell + \frac{1}{2} = \ell \Longleftrightarrow \ell = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|$$

et par récurrence

$$|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}|u_1 - \ell| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \Longrightarrow u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$$

4. Si $u_0 > 1$, alors $u_1 = u_0 - \frac{1}{2}$, et par récurrence limité tant que $u_n > 1$, on a $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2} = u_0 - \frac{n}{2}$. Puisque $u_0 - \frac{n}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, il existe N tel que

$$0 \leqslant u_0 - \frac{N}{2} < \frac{1}{2} \Longleftrightarrow N \leqslant 2u_0 < N + 1$$

il suffit de prendre $N = E(2u_0)$. A partir du rang N, on est ramené au cas précédent. Conlusion $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.
Si $u_0 < 0$, alors $u_1 > 0$ et on est ramené au cas précédent.

Exercice type 10

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$, montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Solution : Puisque $\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x$ et $\operatorname{sh} x \underset{x \to 0}{\sim} x$, on a $\frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$, ainsi f est continue en 0. Elle est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions $\mathcal{C}^1$ (et car $\operatorname{sh} x \neq 0$ sur $\mathbb{R}^*$). Pour $x \neq 0$, on a $f'(x) = \frac{\cos x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \sin x}{\operatorname{sh}^2 x}$. On fait un DL_3

du numérateur, on a

$$\begin{aligned}\cos x &= 1-\tfrac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),\ \operatorname{sh}x = x+\tfrac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right) \Longrightarrow \cos x\operatorname{sh}x = \left(1-\tfrac{x^2}{2}\right)\times\left(x+\tfrac{x^3}{6}\right)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right) = x-\tfrac{x^3}{3}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\ \operatorname{ch}x &= 1+\tfrac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right),\ \sin x = x-\tfrac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right) \Longrightarrow \operatorname{ch}x\sin x = \left(1+\tfrac{x^2}{2}\right)\times\left(x-\tfrac{x^3}{6}\right)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right) = x+\tfrac{x^3}{3}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\end{aligned}$$

Ainsi $\cos x\operatorname{sh}x-\operatorname{ch}x\sin x = -\dfrac{2}{3}x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\underset{x\to 0}{\sim}-\dfrac{2}{3}x^3$ et $\operatorname{sh}^2 x\underset{x\to 0}{\sim}x^2$ d'où

$$f'(x)\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{2}{3}x\xrightarrow[x\to 0]{}0$$

D'après le théorème limite de la dérivée

$$f \text{ est continue sur } \mathbb{R},\ \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^*,\ f'(x)\xrightarrow[x\to 0]{}0 \Longrightarrow f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ avec } f'(0)=0$$

Exercice 4

On pose, pour t réel $h(t)=\dfrac{t^2}{2\pi}-t$ et on définit la fonction φ sur $[0,\pi]$ par :

$$\varphi(0)=-1 \quad\text{et}\quad \varphi(t)=\frac{h(t)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \text{ pour } t\in\,]0,\pi]\,.$$

Montrer que la fonction φ est de classe C^1 sur l'intervalle $[0,\pi]$.

Solution : On commence par la continuité, φ est continue sur $]0,\pi]$ et même $\mathcal{C}^1$ (quotient de fonctions continues). On a $h(t)\underset{t\to 0^+}{\sim}-t$ d'où $\frac{h(t)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\underset{t\to 0^+}{\sim}\dfrac{-t}{2\times\dfrac{t}{2}}=-1=\varphi(0)$. Ceci prouve que $\varphi(t)\xrightarrow[t\to 0^+]{}\varphi(0)$. La fonction φ est continue en 0. Pour $t\in\,]0,\pi]$ on a

$$\varphi'(t)=\frac{h'(t)}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{h(t)\cos\dfrac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}}=\frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}}\left(\left(\frac{2t}{\pi}-2\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)-\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

On a

$$\begin{aligned}\left(\frac{2t}{\pi}-2\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)-\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) &= \left(\frac{2t}{\pi}-2\right)\times\left(\frac{t}{2}+\underset{t\to 0}{o}\left(t^2\right)\right)-\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\times\left(1-\frac{t^2}{8}+\underset{t\to 0}{o}\left(t^2\right)\right)\\ &= \frac{t^2}{2\pi}+\underset{t\to 0}{o}\left(t^2\right)\underset{t\to 0}{\sim}\frac{t^2}{2\pi}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\varphi'(t)\underset{t\to 0^+}{\sim}\frac{1}{t^2}\times\frac{t^2}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\Longrightarrow\varphi'(t)\xrightarrow[t\to 0^+]{}\frac{1}{2\pi}$$

Puisque φ est $\mathcal{C}^0$ sur $[0,\pi]$, $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$ et que φ' a une limite en 0^+, le théorème limite de la dérivée assure que φ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ avec $\varphi'(0)=\dfrac{1}{2\pi}$.

Géry Huvent