Chapitre 14 : Ensembles-Dénombrement

Exercice type 1

Soit E un ensemble, et A, B deux parties de E, on désire montrer que si $A \cap B = A \cup B$ alors $A = B$.

① Le prouver avec les fonctions indicatrices. ②Le prouver par un raisonnement ensembliste.

Solution : ① : On sait que $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$ et que $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$. Par hypothèse, on a donc

$$\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B = 0$$

Mais $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{A^2}$ et de même avec $\mathbb{1}_B$. On a donc $(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2 = 0 \Longrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \Longrightarrow A = B$.
② Il suffit, par symétrie des rôles, de prouver que $A \subset B$. Soit $x \in A$, alors $x \in A \cup B$ car $A \subset A \cup B$. Ainsi $x \in A \cap B \Longrightarrow x \in B$ car $A \cap B \subset B$.

Exercice type 2

Soit E un ensemble, pour $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, on définit la différence symétrique $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

②Exprimer $\mathbb{1}_{A\Delta B}$ à l'aide de $\mathbb{1}_A$ et de $\mathbb{1}_B$.
②Montrer que si $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$, on a $(A\Delta B)\,\Delta C = A\Delta\,(B\Delta C)$

Solution : ① On sait que si X et Y sont des sous ensembles de E, alors $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$. Ainsi $\mathbb{1}_{X\setminus Y} = \mathbb{1}_X \times (1 - \mathbb{1}_Y)$. Avec $X = A \cup B$ et $Y = A \cap B$, on a $\mathbb{1}_X = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_Y = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$. On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{A\Delta B} &= (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B) \times (1 - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B) \\ &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A^2 \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B^2 + \mathbb{1}_A^2 \mathbb{1}_B^2 \\ &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\,\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B\end{aligned}$$

car $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$ et de même avec B).
②On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C} &= \mathbb{1}_{A\Delta B} + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_{A\Delta B} \times \mathbb{1}_C \\ &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\,(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_C \\ &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C + 4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C \\ \mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)} &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{B\Delta C} - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{B\Delta C} \\ &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A\,(\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C) \\ &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C + 4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C \\ &= \mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C}\end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C} = \mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)} \Longrightarrow (A\Delta B)\,\Delta C = A\Delta\,(B\Delta C)$.
Remarque : L'expression de $\mathbb{1}_{A\Delta B}$ est symétrique en A et B, ainsi $\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_{B\Delta A}$. De même l'expression de $\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C}$ est invariante par permutation circulaire ($A \to B \to C \to A$). Ainsi $\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C} = \mathbb{1}_{(B\Delta C)\Delta A} = \mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)}$.

Exercice type 3

Montrer que pour tout entier n l'entier naturel $n\left(n^2 + 5\right)$ est divisible par 6.

Solution : Par récurrence sur n. On définit pour $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}(n) =$ "6 divise $n\left(n^2 + 5\right) = 6k$". n a $\mathcal{P}(0)$ vraie car $0 \times (0 + 5) = 0$ qui est divisible par 6. Supposons, à $n \geqslant 1$ fixé que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, alors 6 divise $n\left(n^2 + 5\right)$.
Mais $A = (n+1)\left((n+1)^2 + 5\right) - n\left(n^2 + 5\right) = 3n^2 + 3n + 6 = 3n\,(n+1) + 6$. L'un des deux entiers n ou $n + 1$ est pair, ainsi il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n\,(n+1) = 6p$. On a donc 6 divise $3n\,(n+1) + 6 = 6\,(p+1)$. D'où 6 divise

$A+n\left(n^2+5\right)=(n+1)\left((n+1)^2+5\right)$ car il divise chaque terme. Conclusion, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Remarque : On peut faire une preuve directe, car $n\left(n^2+5\right)=n\left(n^2-1+6\right)=n(n-1)(n+1)+6n$. Or, parmi $n-1,n,n+1$ l'un est pair, et l'un est multiple de 3, donc 3×2 divise $n(n-1)(n+1)$.

Exercice type 4

Soit $(s_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$. Montrer que $s_n>2\sqrt{n+1}-2$. En déduire la limite de s_n quand n tend vers $+\infty$.

Solution : Par récurrence sur n. On définit pour $n\geqslant 1$, $\mathcal{P}(n)=$ "$s_n>2\sqrt{n+1}-2$". On a $\mathcal{P}(1)$ vraie car

$$s_1=\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{1}}=1>2\sqrt{2}-2\Longleftrightarrow 3>2\sqrt{2}\Longleftrightarrow 9>8$$

Supposons, à $n\geqslant 1$ fixé que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie alors $s_n>2\sqrt{n+1}-2$. Or

$$s_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}}=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\underset{HR_n}{>}2\sqrt{n+1}-2+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Il **suffit** donc de vérifier que $2\sqrt{n+1}-2+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}>2\sqrt{n+2}-2$. Or cette dernière inégalité équivaut à

$$\begin{aligned}\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}<\frac{1}{2\sqrt{n+1}}&\iff\frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}<\frac{1}{2\sqrt{n+1}}\\&\iff\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}<\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}}\end{aligned}$$

Ce qui est vrai car $\sqrt{n+2}>\sqrt{n+1}$. Puisque $2\sqrt{n+1}-2\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$, on en déduit que $s_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$.

Exercice type 5

Montrer que,$\forall p\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}$. Faire une récurrence sur n, à p fixé. Pour mémoire, $\dbinom{k}{p}=0$ si $p>k$.

Solution : Comme indiqué, par récurrence sur n, à p fixé. Soit $p\in\mathbb{N}$ fixé, on définit, pour tout entier $n\geqslant 0$, la proposition

$$\mathcal{P}(n):\ \text{"}\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}\text{"}$$

Initialisation : $\mathcal{P}(0)$ vraie, en effet $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}\binom{k}{p}=\binom{0}{p}=\begin{cases}1\text{ si }p=0\\0\text{ si }p>0\end{cases}$ et $\dbinom{1}{p+1}=\begin{cases}1\text{ si }p=0\\0\text{ si }p>0\text{ car dans ce cas }p+1>1\end{cases}$.

Hérédité : Supposons à $n\geqslant 0$ fixé que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Par hypothèse de récurrence on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}$ or

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{k}{p}=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p}\right)+\binom{n+1}{p}\text{ ainsi }\sum_{k=0}^{n+1}\binom{k}{p}\underset{HR_n}{=}\binom{n+1}{p+1}+\binom{n+1}{p}$$

On reconnaît la relation de Pascal sur les coefficients du binôme : $\dbinom{n+1}{p}+\dbinom{n+1}{p+1}=\dbinom{n+2}{p+1}$ d'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{k}{p}=\binom{n+2}{p+1}$

i.e. $\mathcal{P}(n+1)$.
Conclusion, $\mathcal{P}(n)$ vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
Interprétation : la somme des éléments d'une colonne jusqu'a une ligne donnée se retrouve sur la ligne et la colonne suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & & & \\
1 & 1 & 0 & 0 & & & \\
1 & 2 & \boxed{+1} & 0 & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
1 & 3 & \boxed{+3} & 1 & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
1 & 4 & \boxed{+6} & 4 & 1 & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
1 & 5 & \boxed{+10}\searrow & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & \boxed{=\mathbf{20}} & 15 & 6 & 1
\end{array}$$

Exercice 1

On définit pour $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, $u(n,m) = \dfrac{(2m)!\,(2n)!}{n!m!\,(m+n)!}$, montrer que si $m \geqslant 1$,

$$u(n,m) + u(n+1,m-1) = 4u(n,m-1)$$

En déduire que $u(m,n) \in \mathbb{N}$.

Solution : On a $\forall m \geqslant 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
u(n,m) + u(n+1,m-1) &= \frac{(2m)!\,(2n)!}{n!m!\,(m+n)!} + \frac{(2m-2)!\,(2n+2)!}{(n+1)!\,(m-1)!\,(m+n)!} \\
&= \frac{(2m-2)!\,(2n)!}{n!\,(m-1)!\,(m+n)!} \times \left(\frac{(2m)(2m-1)}{m} + \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)}\right) \\
&= \frac{(2m-2)!\,(2n)!}{n!\,(m-1)!\,(m+n)!} \times 4(m+n) \\
&= 4\frac{(2(m-1))!\,(2n)!}{n!\,(m-1)!\,(n+(m-1))!} = 4u(n,m-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2m)! &= (2m)(2m-1) \times (2m-2)! \\
(2n+2)! &= (2n+2)(2n+1) \times (2n)! \\
(n+1)! &= (n+1) \times n! \\
m! &= m \times (m-1)!
\end{aligned}$$

$$\frac{(2m)(2m-1)}{m} = 2(2m-1) \qquad \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)} = 2(2n+1)$$

On procède ensuite par récurrence sur n, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la proposition

$$\mathcal{P}(n) = \text{"}\forall m \in \mathbb{N}, u(n,m) \in \mathbb{Z}\text{ "}$$

Initialisation : Montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Il faut prouver que pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, $u(0,m) \in \mathbb{Z}$. Or $u(0,m) = \dfrac{(2m)!}{m!m!} = \dbinom{2m}{m} \in \mathbb{Z}$ en tant que coefficient du binôme.
Hérédité : On suppose à $n \geqslant 0$ fixé que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
On a vu que pour $m \geqslant 1$, $u(n+1,m-1) = 4u(n,m-1) - u(n,m) \in \mathbb{Z}$, car d'après $\mathcal{P}(n)$ on a $u(n,m-1) \in \mathbb{Z}$ et $u(n,m) \in \mathbb{Z}$ (la proposition $\mathcal{P}(n)$ signifie que $u(n,m) \in \mathbb{Z}$ ceci pour tout entier m, donc également pour $m-1$). En remplaçant m par $m-1$ qui est dans $\mathbb{N}$, on en déduit que $u(n+1,m) \in \mathbb{Z}$.
On a donc prouvé par récurrence que $u(n,m) \in \mathbb{Z}$, mais en tant que quotient d'entier naturel, on a $u(m,n) \geqslant 0$ ainsi $u(m,n) \in \mathbb{N}$.

Exercice type 6

Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$

Solution : Il s'agit d'une somme souble, on a donc

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij=\sum_{i=1}^{n} i\left(\sum_{j=1}^{n} j\right)=\sum_{i=1}^{n} i\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} i=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Exercice type 7

Calculer $\displaystyle\sum_{0\leqslant p\leqslant q\leqslant n} 2^p$ de deux manières, en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} p2^p$.

Solution : Il s'agit d'une somme triangulaire.

$p\backslash q$	0	1	2	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	n
0	2^0	2^0	2^0		2^0		2^0
1		2^1	2^1	$\cdots$		$\cdots$	2^1
2			$\ddots$				
$\vdots$				$\ddots$			
p					2^p	$\cdots$	2^p
$\vdots$						$\ddots$	
n							2^n

Puisque $0\leqslant p\leqslant q\leqslant n$, on peut sommer ligne par ligne ou par colonne par colonne. Si on somme par les colonnes, on a

$$\sum_{q=0}^{n}\underbrace{\left(\sum_{p=0}^{q} 2^p\right)}_{\text{somme sur la colonne q}}=\sum_{q=0}^{n}\frac{2^{q+1}-1}{2-1}=\sum_{q=0}^{n}2^{q+1}-\sum_{q=0}^{n}1=2\sum_{q=0}^{n}2^q-(n+1)=2\frac{2^{n+1}-1}{2-1}-(n+1)$$

Si on somme par lignes, on a

$$\sum_{p=0}^{n}\underbrace{\left(\sum_{q=p}^{n} 2^p\right)}_{\text{somme sur la ligne p}}=\sum_{p=0}^{n}(n-p+1)\,2^p=(n+1)\sum_{p=0}^{n}2^p-\sum_{p=0}^{n}p2^p=(n+1)\,\frac{2^{n+1}-1}{2-1}-\sum_{p=0}^{n}p2^p$$

On en déduit que

$$2^{n+2}-2-(n+1)=(n+1)\,2^{n+1}-(n+1)-\sum_{p=0}^{n}p2^p$$

d'où

$$\sum_{p=0}^{n}p2^p=(n+1)\,2^{n+1}-2^{n+2}+2=(n-1)\,2^{n+1}+2$$

Exercice type 8

Déterminer les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $\dfrac{2n^2 - 2n + 4}{n+1} \in \mathbb{Z}$.

Solution : On a $2n^2 - 2n + 4 = (n+1)(2n-4) + 8$, ainsi

$$\frac{2n^2 - 2n + 4}{n+1} = 2n - 4 + \frac{8}{n+1} \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow n+1 \text{ divise } 8$$

Ceci impose $n + 1 \leqslant 8 = 2^3$ et $n + 1 = 1$ ou $n + 1$ multiple de 2. Bref, il reste $n \in \{0, 1, 3, 7\}$.

Exercice 2

Montrer qu'il n'existe aucun nombre premier entre $n! + 2$ et $n! + n$.

Solution : Bon, cela semble compliqué, mais pour $2 \leqslant p \leqslant n$, on a

$$n! + p = p + p \times \prod_{\substack{k=2 \\ k \neq p}}^{n} k \text{ est divisible par } p$$

donc n'est jamais premier !

Exercice type 9

On se propose de montrer que si $a^n - 1$ est premier alors n est premier et $a = 2$.

① Soit $2 \leqslant p < q$ deux entiers, montrer que $N = 2^{pq} - 1$ n'est pas premier.
② Montrer que si $N = 2^n - 1$ est premier alors n est premier.
③ Montrer que si $a > 2$ et $n \geqslant 2$ alors $N = a^n - 1$ n'est pas premier.

Solution : ① On a $N = 2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1 = (2^p - 1) \displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} (2^p)^{k-1}$ n'est pas premier car est divisible par $2^p - 1 \geqslant 2^2 - 1 = 3$ qui est différent de N.
②Par l'absurde, si n n'est pas premier, il admet deux diviseurs $2 \leqslant p \leqslant q$ et on applique ①.
③Si $a > 2$ et $n > 2$, alors $a^n - 1 = (a-1) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k$ est divisible par $a - 1 \geqslant 2$ qui est différent de N donc n'est pas premier.

Exercice type 10

Une urne contient 10 boules numérotées, combien y a-t-il de tirages si :

①On tire trois boules successivement avec remise.
②On tire trois boules successivement sans remise.
③On tire trois boules ensembles.

Solution : Soit $E = \{b_1, \cdots, b_{10}\}$ l'urne.
① : Chaque tirage est un élément de E^3. Puisque $\#\left(E^3\right) = (\#E)^3 = 1000$, il y a 1000 tirages.
En d'autres termes, à chaque boule tirée, il y a 10 choix possibles, cela donne 10^3 choix. En d'autres termes,
② Chaque tirage est une $p-$liste de E, il y a $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$ tirages. En d'autres termes, au premier tirage, on a 10 choix, au second 9 choix et au dernier 8 choix. Cela donne $10 \times 9 \times 8 = 720$ tirages.
③ Chaque tirage est une partie de E à 3 éléments, il y a $\dbinom{10}{3} = \dfrac{A_{10}^3}{6!} = \dfrac{720}{6} = 120$ tirages.

Exercice type 11

Combien y a-t-il d'anagrammes de "stylographique", et de "barbapapa" ?

Solution : Stylographique est le plus long mot de la langue française ayant toutes ses lettres distinctes. Chaque permutation des lettres donne un anagramme, soit au total $14! = 87\,178\,291\,200$ anagrammes.
Pour barbapapa, il y a quatre "a", deux "b" et deux "p" (et un seul rrrrrrrrrr !), soit 9 lettres. Pour fabriquer un anagramme, on choisit où placer les quatre "a". Ce qui donne $\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{2 \times 3 \times 4} = 3 \times 7 \times 6 = 126$ choix. Puis, dans les cinq emplacements qui restent, on place les deux "b", ce qui donne $\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ choix. Puis, on choisit ou placer les deux "p" dans les trois places restantes (ou bien le "r") ce qui donne $\binom{3}{2} = \binom{3}{1} = 3$ choix. Au total, il y a $126 \times 10 \times 3 = 3780$ anagrammes.
Remarque : On peut aussi distinguer les quatre "a" (quatre couleurs), les deux "b" et les deux "p". On a alors 9! permutations. Mais ayant un anagramme, chaque permutations des quatre "a" (au nombre de 4!) donne le même mot, et de même chaque permuation des "b" ou des "p".
Au total, on a donc $\frac{9!}{4!2!2!} = 3780$ anagrammes.

Exercice 3

On lance trois dés à six faces numérotés et discernable par leur couleur.

① Combien y a-t-il de tirages différents ?
② Combien y a-t-il de tirages contenant au moins un 6 ?
③ Combien y a-t-il de tirages contenant deux et seulement deux faces identiques.
④ Combien y a-t-il de tirages tels que la somme des trois dés soit paire.
⑤ Combien y a-t-il de tirages contenant deux faces identiques et dont la somme des trois dés est paire ?

Solution : ② Un tirage est une 3−liste de $[[1,6]]$, cela donne $6^3 = 216$ tirages.
On peut aussi dire qu'il y a 6 choix par dé.
② Un tirage n'ayant aucun 6 est une 3−liste de $[[1,5]]$, il y en a 5^3. Il y a donc $6^3 - 5^3$ tirages ayant au moins un 6.
On peut aussi compter les tirages ayant 1 seul 6. On commence donc par choisir le dé donnant un 6, cela donne 3 choix, puis on choisit les deux autres faces, cela donne 5^2 choix. Soit au total 3×5^2 tirage ayant un seul 6. Puis on dénombre ceux ayant 2 six, on choisit les deux dés ayant un 6, cela donne $\binom{3}{2}$ choix, puis il reste 5 choix pour le dernier dé. Enfin, il y a un seul tirage ayant 3 faces égales à 6. On retrouve le nombre cherché : $3 \times 5^2 + 3 \times 5 + 1 = 91$.
③ Le plus simple est de chercher les tirages ayant trois faces distinctes est A_3^6 car un tel tirage est une 3−liste d'éléments 2 à 2 distincts. Ainsi il existe $6^3 - A_3^6 = 6^3 - \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} = 96$ tirages donnant 2 ou 3 faces identiques. Comme il n'y a que 6 tirages ayant 3 faces identiques, on a 90 tirages.
On peut aussi choisir les deux dés ayant la même face, ce qui donne $\binom{3}{2} = 3$ choix. Puis choisir le numéro de ces deux faces, soit 6 choix possibles. Il reste alors 5 choix pour la dernière face. On retrouve bien $3 \times 6 \times 5 = 90$ tirages.
④ On procède encore par disjonction des cas. Pour que la somme des trois dés soit paire, il faut un nombre pair de faces impaires, donc soit trois faces paires, soit une seule.
Dans le premier cas, cela revient à choisir une 3−liste de $\{2,4,6\}$, soit 3^3 choix.
Dans le second cas, on choisit la face paire, ce qui donne 3 choix, puis le numéro sur cette face, choisi parmi $\{2,4,6\}$, soit 3 choix. Et on choisit ensuite un numéro impair sur chacune des deux autres faces, soit 3 choix pour chaque face, donc $3 \times 3 \times 3$ tirages.
Au total, on a $3^3 + 3^2 \times 3^2 = 108$ faces dont la somme est paire.
En fait c'était évident. En effet, si on jette les dés sur une table en verre, on peut lire le résultat par dessus ou par dessous. Comme la somme des chiffres sur deux faces oppoées est toujours 7, on associe à un tirage dont la somme est pair un tirage dont la somme est impair. Pour être formel, au tiage (a,b,c) on asssocie $(7-a, 7-b, 7-c)$ dont la somme est $21 - (a+b+c)$ donc de parité opposée à $a+b+c$. On a donc une bijection entre les tirages à somme paire et ceux à somme impair. Donc $\frac{216}{2}$ tirages de chaque type.
⑤ Si la somme des faces est paire, on a deux cas disjoints : ou bien trois faces paires, ou bien deux faces impaires. Si on

impose deux faces identiques en plus on obtient trois cas disjoints :
- Trois faces paires identiques, cela donne 3 tirages possibles (on choisit dans $\{2,4,6\}$).
- Trois faces paires dont deux sont identiques. On a 3 choix pour la face ayant le numéro unique, puis 3 choix pour ce numéro et enfin 2 choix pour le numéro commun. Soit $3\times 3\times 2 = 18$ tirages possibles.
- Deux faces impaires ayant même numéro. On choisit les deux dés parmi 3, ce qui donne 3 choix, puis le numéro (impair), soit 3 choix, et enfin le numéro de la face paire, soit 3 choix. Au total, on a 3^3 choix.

En fin de compte, on dénombre $3+18+3^3 = 48$ tirages.

Remarque : On peut aussi, par le même procédé qu'à la question précédente, montrer qu'il y autant de tirages de somme paire à deux faces exactement identiques que de tirage de somme impair. Il y a donc $\dfrac{90}{2} = 45$ tirages de somme paire à deux faces identiques. Puisqu'il y a 3 tirages à somme paire ayant les trois faces identiques, on retrouve le résultat 48.

Une autre méthode consiste à dire que les deux faces identiques ont même parité. On choisit donc un chiffre qui apparait deux fois, cela donne 6 choix. Puis on le palce sur 2 dés, soit $\dbinom{3}{2} = 3$ choix et le dernier chiffre est alors nécessairement pair. On obtient $6\times 3\times 3 = 54$ tirages. Bon, en procédant ainsi, les tirages à 3 faces identiques sont comptés 3 fois, donc 2 fois de trop . Comme il y a 3 tirages à trois faces, on retire 2×3, ce qui donne $54-6 = 48$ ouf !