Chapitre 15 : Polynômes

Exercice type 1

Calculer, pour $n \geqslant 2$ les restes des divisions euclidiennes de $P = (X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2$ par :

a) $(X-3)(X-2)$ b) $(X-2)^2$

Solution : Pour a) On écrit la division euclidienne (théorique) de P par $A = (X-3)(X-2)$,

$$\text{On a } P(X) = (X-3)(X-2)Q(X) + R \text{ avec } \deg R < 2$$

Ainsi R est de degré au plus 1, il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $R = \alpha X + \beta$. On a donc l'égalité

$$P(X) = (X-3)(X-2)Q(X) + \alpha X + \beta$$

Avec $X = 3$ on a $3\alpha + \beta = P(3) = -1$ et avec $X = 2$ on a $2\alpha + \beta = P(2) = -1$. On en déduit que $\alpha = 0$ et $\beta = -1$, le reste cherché est constant égal à -1.

Pour b) De la même manière, il existe $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$P(X) = (X-2)^2 Q(X) + \gamma X + \delta$$

qui donne avec $X = 2$, $2\gamma + \delta = P(2) = -1$. On dérive l'égalité précédente pour obtenir

$$P'(X) = 2(X-2)Q(X) + (X-2)^2 Q'(X) + \gamma$$

e qui donne avec $X = 2$, $P'(2) = -2n = \gamma$. Le reste cherché est $-2nX + 4n - 1$.

Exercice type 2

Déterminer a et b dans $\mathbb{R}$, pour que $Q = X^2 - aX + 1$ divise $P = X^4 - X + b$.

Solution : On sait que $Q \mid P$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de Q par P est nul. Or $P = \left(X^2 - aX + 1\right)\left(X^2 + aX + a^2 - 1\right) + \left(a^3 - 2a - 1\right)X + \left(b - a^2 + 1\right)$, ainsi

$$Q \mid P \iff \left\{\begin{array}{c} a^3 - 2a - 1 = 0 \\ b - a^2 + 1 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} a^3 - 2a - 1 = 0 \\ b = a^2 - 1 \end{array}\right.$$

Puisque $a^3 - 2a - 1 = (a+1)\left(a^2 - a - 1\right)$ (on a une racine évidente) on a trois couple de solutions

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

On résout $a^2 - a - 1 = 0$ et on utilise alors $b = a^2 - 1 = a$.

Exercice type 3

Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$, non nuls, tels que $\left(X^2+1\right)P'' - 6P = 0$ et $P(1) = 2$.

Solution : Soit $P \neq 0$, et n le degré de P. Ainsi $P = a_n X^n + Q$ où $a_n \neq 0$ et $\deg Q < n$. En premier lieu, on a $n > 1$, car sinon $P'' = 0$ et $P = 0$.

On a $P'' = n(n-1)a_n X^{n-2} + Q''$ et

$$(X^2+1)P'' - 6P = \left(n(n-1) - 6\right)a_n X^n + n(n-1)a_n X^{n-2} + \left(X^2+1\right)Q'' - 6Q = 0$$

donc puisque $a_n \neq 0$, on a $n(n-1)-6=0$, ce qui donne $n=-2$ ou $n=3$. L'entier n étant positif, le degré de P est $n=3$. Puis on pose $P=aX^3+bX^2+cX+d$, alors

$$\begin{aligned}(X^2+1)P''-6P &= (X^2+1)(6aX+2b)-6\left(aX^3+bX^2+cX+d\right)\\ &= -4bX^2+6(a-c)X+(2b-6d)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} b=d=0\\ a=c\end{cases}\end{aligned}$$

Soit $P=a\left(X^3+X\right)$ et la condition $P(1)=2$ impose que

$$P=X^3+X.$$

Autre méthode : Ayant déterminé $\deg P=3$, on peut également écrire que $\left(X^2+1\right)P''=6P \Longrightarrow \left(X^2+1\right)$ divise P. On a donc $P=\left(X^2+1\right)(aX+b)$ car $\deg P=3$.On a donc $P=aX^3+bX^2+aX+b \Longrightarrow P''=6aX+2b$. Ainsi

$$(X^2+1)P''=6P \Longleftrightarrow \left(X^2+1\right)(6aX+2b)=\left(X^2+1\right)(6aX+6b) \Longrightarrow b=0$$

d'où $P=aX\left(X^2+1\right)$ puis $P(1)=2$ donne $a=1$.

Exercice type 4

On considère l'application Φ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui même définie par

$$\Phi(P)=(2X-1)P-\left(X^2+\frac{1}{2}\right)P'$$

où P' désigne le polynôme dérivé. Déterminer le degré de $\Phi(P)$ en fonction du degré de P. Justifier que Φ n'est pas surjective et résoudre $\Phi(P)=1$.

Solution : Si $P=0$ alors $\Phi(P)=0$ et ainsi $\deg(\Phi(P))=-\infty$. Sinon, on pose $P(X)=a_nX^n+Q$ où $n=\deg P$, $a_n\neq 0$ et $\deg Q<n$. On a alors

$$\begin{aligned}\Phi(P) &= (2X-1)(a_nX^n+Q)-\left(X^2+\frac{1}{2}\right)\left(na_nX^{n-1}+Q'\right)\\ &= (2-n)a_nX^{n+1}+R \text{ où } \deg R<n+1\end{aligned}$$

On a donc deux cas :
Si $n\neq 2$, on constate que $\deg\Phi(P)=\deg(P)+1$.
Si $n=2$, on pose $P=aX^2+bX+c$ où $a\neq 0$, alors

$$\begin{aligned}\Phi(P) &= (2X-1)\left(aX^2+bX+c\right)-\left(X^2+\frac{1}{2}\right)\left(aX^2+bX+c\right)'\\ &= (2X-1)\left(aX^2+bX+c\right)-\left(X^2+\frac{1}{2}\right)(2aX+b)=(b-a)X^2+(2c-b-a)X-\left(\frac{b}{2}+c\right)\end{aligned}$$

Permier sous cas : $b\neq a$, ainsi $\deg\Phi(P)=2$.
Deuxième sous cas $b=a$, ainsi $\Phi(P)=2(c-a)X-\left(\frac{1}{2}a+c\right)$, d'où deux possibilités, $a=b$ et $a\neq c$, ainsi $\deg\Phi(P)=1$, ou bien $a=b=c$ et $\Phi(P)=-\frac{3a}{2}\neq 0$ donc $\deg(\Phi(P))=0$. On résume ainsi pour $P\neq 0$.

$P=$	de $\deg P\neq 2$	$a\left(X^2+X+1\right)$ où $a\neq 0$	$a\left(X^2+X\right)+c$ où $a\neq c$	aX^2+bX+c où $a\neq b$
$\deg(\Phi(P))$	$\deg(P)+1$	0	1	2

On constate que $\deg(\Phi(P))\neq 3$, ainsi Φ n'est pas injective.
Pour résoudre $\Phi(P)=1$, on doit avoir $P=a\left(X^2+X+1\right)$ et dans ce cas $\Phi(P)=\frac{3a}{2}$ d'où

$$\Phi(P)=1 \Longleftrightarrow P=-\frac{2}{3}\left(X^2+X+1\right)$$

Exercice 1

Résoudre l'équation suivante d'inconnue P dans $\mathbb{C}[X]$,

$$X(X+1)P''+(X+2)P'-P=1$$

Solution : On commence par déterminer le degré de P. Le polynôme $P=0$ n'est pas solution, si P est solution, notons d le degré de P. On a donc $P=a_dX^d+Q$ où $\deg(Q)<d$ et $a_d\neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} X(X+1)P''+(X+2)P'-P &= X(X+1)\left[d(d-1)a_dX^{d-2}+Q''\right]+(X+2)\left[da_dX^{d-1}+Q'\right]-a_dX^d+Q \\ &= (d(d-1)+d-1)a_dX^d+(X(X+1)Q''+(X+2)Q'-Q)=1 \end{aligned}$$

Ainsi

$$X(X+1)P''+(X+2)P'-P=\left(d^2-1\right)a_dX^d+(X(X+1)Q''+(X+2)Q'-Q)$$

Puisque $\deg Q<d$, on a $\deg((X(X+1)Q''+(X+2)Q'-Q))<d$ (chaque terme étant de degré au plus d). On a donc deux cas possibles :

- Ou bien $d=0$, et $-a_d=1$, d'où $P=-1$.
- Ou bien $d=1$ (pour annuler le terme de degré non constant). Dans ce cas P s'écit $P=aX+b$ avec $a\neq 0$, $P'=a$ et $P''=0$. On remplace dans l'équation pour obtenir

  $$X(X+1)P''+(X+2)P'-P=a(X+2)-(aX+b)=2a-b=1$$

  ce qui donne a quelconque et $b=2a-1$.

L'ensemble des solutions est

$$S=\left\{P=\underbrace{a(X+2)}_{\substack{\text{solution générale de}\\ \text{l'équation sans second membre}}}+\underbrace{(-1)}_{\text{solution particulière}} \text{ où } a\in\mathbb{C}\right\}$$

Exercice type 5

Montrer que pour tout $n\neq 0$, X^2-X+1 divise $P=(X-1)^{n+2}+X^{2n+1}$.

Solution : Le polynôme $Q=X^2-X+1$ se factorise en $(X+j)\left(X+j^2\right)$ où $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Ses racines sont simples, ainsi si $P(-j)=P\left(-j^2\right)=0$, alors $(X-j)\left(X-j^2\right)$ divise P. Or

$$P(-j)=(-j-1)^{n+2}+(-j)^{2n+1}$$

Puisque $1+j+j^2=0$, on obtient $P(-j)=\left(j^2\right)^{n+2}-j^{2n+1}=j^{2n+4}-j^{2n+1}=0$ car $j^{2n+4}=j^{2n+1}\times j^3$ et $j=1$. Enfin, $P\left(-j^2\right)=\overline{P(-j)}=0$ car P est à coefficients réels.

Exercice type 6

Montrer que pour tout $n\neq 0$, $(X-1)^3$ divise $P=nX^{n+2}-(n+2)X^{n+1}+(n+2)X-n$.

Solution : Il s'agit de prouver que 1 est racine triple de P, donc de prouver que

$$P(1) = P'(1) = P''(1)$$

Or $P(1) = n - (n+2) + (n+2) - n = 0$, $P'(1) = n(n+2) - (n+2)(n+1) + (n+2) = 0$ et enfin $P''(1) = n(n+2)(n+1) - (n+2)(n+1)n = 0$.

Exercice type 7

Déterminer a pour que $P(X) = X^4 + aX + a$ et $Q(X) = X^3 + aX + a$ aient une racine commune, préciser cette racine.

Solution : Si x est racine commune de P et Q alors $\begin{cases} x^4 + ax + a = 0 \\ x^3 + ax + a = 0 \end{cases} \underset{L_1 - L_2}{\iff} \begin{cases} x^4 - x^3 = 0 \\ x^3 + ax + a = 0 \end{cases}$.
On a donc deux cas, ou bien $x = 0$ et dans ce cas on reporte dans L_2 pour avoir $a = 0$. Ainsi $P(X) = X^4$, $Q(X) = X^3$ ont bien 0 comme racine commune.
Ou bien $x = 1$, et L_2 donne $2a + 1 = 0 \Longrightarrow a = -\dfrac{1}{2}$ et dans ce cas $P(X) = X^4 - \dfrac{1}{2}X - \dfrac{1}{2}$ et $Q(X) = X^3 - \dfrac{1}{2}X - \dfrac{1}{2}$ ont $x = 1$ comme racine commune.
Conclusion : deux valeurs de a possibles, $a = 0$ ou $a = \dfrac{1}{2}$.

Exercice type 8

Soit P et Q deux polynômes de $K[X]$, on note R le reste de la division euclidienne de P et de Q.

1. Montrer que $\alpha \in K$ est racine commune à P et à Q si et seulement si α est racine commune à Q et à R.
2. En déduire que $P = X^3 + pX + q$ admet une racine double si et seulement si $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Solution :

1. Ecrivons la division euclidienne de P par Q :
$$P = AQ + R \text{ avec } \deg R < \deg Q$$
Alors $P(\alpha) = A(\alpha)Q(\alpha) + R(\alpha)$. Ainsi $P(\alpha) = Q(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow Q(\alpha) = R(\alpha) = 0$.
2. On sait que P a une racine double si et seulement si P et P' ont une racine commune. On applique donc le résultat du 1). Puisque
$$X^3 + pX + q = \left(3X^2 + p\right) \times \frac{X}{3} + \left(\frac{2p}{3}X + q\right)$$
$$P \text{ a une racine double } \Longleftrightarrow P'(X) = 3X^2 + p \text{ et } R(X) = \frac{2p}{3}X + q \text{ ont une racine commune}$$
Deux cas se présentent alors :
Premier cas : $p \neq 0$, $R(X)$ a une unique racine $\alpha = -\dfrac{3q}{2p}$. Ainsi
$$P \text{ a une racine double } \Longleftrightarrow P'(\alpha) = 3\left(-\frac{3q}{2p}\right)^2 + p = \frac{4p^3 + 27q^2}{4p^2} = 0 \Longleftrightarrow 4p^3 + 27q^2 = 0$$
Second cas : $p = 0$, dans ce cas $P = X^3 + q$ qui a trois racines $\sqrt[3]{q}$, $j\sqrt[3]{q}$ et $j^2\sqrt[3]{q}$, distictes si $q \neq 0$, ainsi P a une racine double si et seulement si $q = 0$, donc si et seulement si $4p^3 + 27q^2 = 27q^2 = 0$ (on est dans le cas où $p = 0$).
Remarque : Le terme $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ est le discriminant du polynôme P. Si $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a \neq 0$, alors P a les mêmes racines que $P_1(X) = X^3 + \dfrac{b}{a}X^2 + \dfrac{c}{a}X + \dfrac{d}{a}$. En posant $P_2(X) = P_1\left(X - \dfrac{b}{3a}\right)$, on obtient
$$P_2(X) = X^3 + \frac{3ac - b^2}{3a^2}X + \frac{27a^2d + 2b^3 - 9abc}{27a^3} = X^3 + pX + q$$
On peut donc, pour la détermination des racines, se ramener à un polynôme du type $X^3 + pX + q$.

Exercice type 9

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

Solution : On montre déjà l'unicité (ce qui ne donne aucune information sur l'existence !).
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose qu'il existe deux polynômes T_n et U_n dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R},\, T_n(\cos\theta) = U_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$. Pour $x \in [-1,1]$, on pose $\theta = \arccos x$, alors $(\cos\arccos x = x)$

$$T_n(x) = T_n(\cos\theta) = U_n(\cos\theta) = U_n(x)$$

On en déduit que le polynôme $T_n - U_n$ est nul sur $[-1,1]$, il admet donc une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul, ce qui prouve que

$$T_n = U_n \text{ est unique}$$

Existence : On sait que

$$\forall n \in \mathbb{N},\, \forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = 2\cos((n+1)\theta)\cos\theta$$

On définit donc la suite $(T_n)_n$ par récurrence en posant

$$T_0(X) = 1,\, T_1(X) = X \text{ et } T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$$

On montre par récurrence double la proposition $\mathcal{P}(n) = "\forall \theta \in \mathbb{R},\, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)"$.
C'est vrai si $n = 0$ et $n = 1$ car

$$T_0(\cos\theta) = 1 = \cos(0 \times \theta) \text{ et } T_1(\cos\theta) = \cos(1 \times \theta).$$

Si $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, alors

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos\theta) &= 2\cos\theta T_{n+1}(\cos\theta) - T_n(\cos\theta) = 2\cos\theta\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\ &= \cos((n+2)\theta) \end{aligned}$$

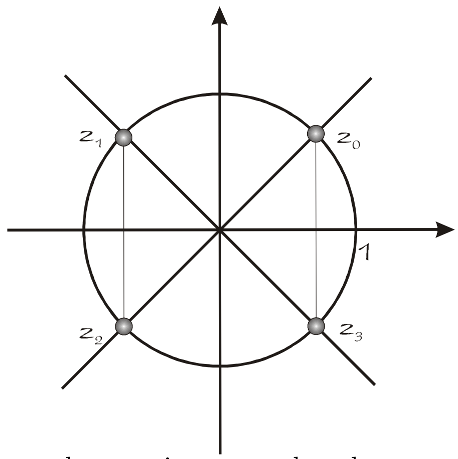
d'où $\mathcal{P}(n+2)$.
Remarque : On peut montrer (récurrence) que $\deg(T_n) = n$, que le coefficient dominant est 2^{n-1} si $n \geqslant 1$. Enfin, on peut remarquer que $\cos(n\arccos x) = T_n(x)$ est un polynôme en x.
Les polynômes $(T_n)_n$ sont les polynômes de Tchebychev (du nom du Mathématicien Russe Pafnouti Tchebychev).

Exercice 2

Factoriser sur $\mathbb{R}$ le polynôme $X^4 + 1$.

Solution : On détermine les racines dans $\mathbb{C}$, on a $z^4 = -1 = e^{i\pi} \iff \exists k \in \{0,1,2,3\},\, z = e^{\iota\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right)} = e^{\iota\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)}$. Les racines de $X^4 + 1$ sont donc

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}},\ z_1 = ie^{i\frac{\pi}{4}},\, z_2 = -e^{i\frac{\pi}{4}} = \overline{z_1} \text{ et } z_3 = -ie^{i\frac{\pi}{4}} = z_0$$



Les racines sont deux deux conjugues car le polynme est rel et deux deux opposes car le polynme est pair.

Elles sont bien deux à deux conjuguées car $X^4+1 \in \mathbb{R}[X]$ et deux à deux opposées car X^4+1 est pair. On a donc

$$\begin{aligned} X^4+1 &= (X-z_0)(X-\overline{z_0}) \times (X-z_1)(X-\overline{z_1}) \\ &= \left(X^2 - 2\operatorname{Re}(z_0)X + |z_0|^2\right)\left(X^2 - 2\operatorname{Re}(z_1)X + |z_1|^2\right) \\ &= \left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right) \end{aligned}$$

Seconde méthode : On a $X^4+1 = \left(X^2+1\right)^2 - 2X^2 = \left(X^2+1\right)^2 - \left(\sqrt{2}X\right)^2$ et on utilise $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, c'est plus rapide, mais à l'oral, soyez certain d'avoir dans ce cas un second exercice beaucoup plus dur ....

Exercice type 10

Factoriser sur $\mathbb{R}$ le polynôme X^8+X^4+1.

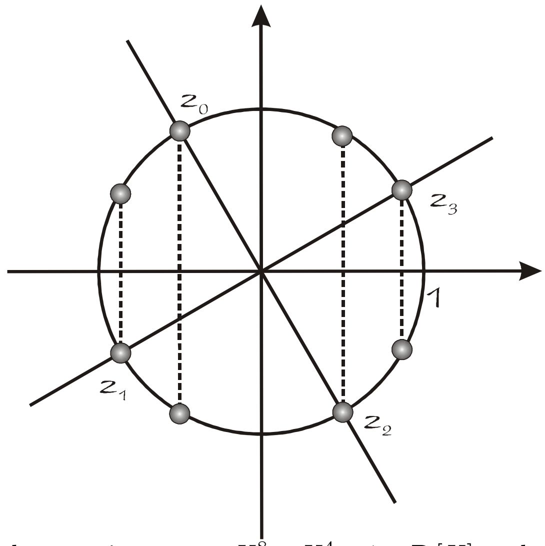
Solution : On résout donc $z^8+z^4+1=0$, on pose $Z=X^4$, ainsi $X^8+X^4+1=Z^2+Z+1$ dont les racines sont $j=j^4$ et j^2. On résout ensuite

$$Z^4 = j = j^4 \Longleftrightarrow \left(\frac{Z}{j}\right)^4 = 1 \Longleftrightarrow \exists k \in \{0,1,2,3\},\ Z = je^{\frac{2ik\pi}{4}} = je^{\frac{ik\pi}{2}}$$

Les solutions de $Z^4=j$ sont donc

$$z_0 = j,\ z_1 = ij = e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{7i\pi}{6}},\ z_3 = -j \text{ et } z_4 = -ij = -e^{\frac{7i\pi}{6}}$$

On a donc trouvé quatre racines de $P=X^8+X^4+1$ non conjugués deux à deux. Puisque P est dans $\mathbb{R}[X]$, si z est racine de P, alors $\overline{z}$ est également racine de P. Les quatre autres racines de P sont donc $\overline{z_0}$, $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$ et $\overline{z_3}$.



Les racines sont deux deux conjugues car $X^8 + X^4 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ et deux deux opposes car le polynme est pair.

On a donc

$$X^8 + X^4 + 1 = (X - z_0)(X - \overline{z_0}) \times (X - z_1)(X - \overline{z_1}) \times (X - z_2)(X - \overline{z_2}) \times (X - z_3)(X - \overline{z_3})$$

Avec $(X - z)(X - \overline{z}) = X^2 - 2\,\mathrm{Re}(z)\,X + |z|^2$, on obtient

$$X^8 + X^4 + 1 = \left(X^2 + X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{3}X + 1\right)\left(X^2 - X + 1\right)\left(X^2 - \sqrt{3}X + 1\right)$$

Autre méthode : On a

$$X^8 + X^4 + 1 = \left(X^4 + 1\right)^2 - X^4 = \left(X^4 + 1 - X^2\right)\left(X^4 + 1 + X^2\right)$$

Puis

$$\begin{aligned} X^4 + X^2 + 1 &= \left(X^2 + 1\right)^2 - X^2 = \left(X^2 + 1 - X\right)\left(X^2 + 1 + X\right) \\ X^4 - X^2 + 1 &= \left(X^2 + 1\right)^2 - 3X^2 = \left(X^2 + 1 - \sqrt{3}X\right)\left(X^2 + 1 + \sqrt{3}X\right) \end{aligned}$$

Ah, sacré $a^2 - b^2$!

Exercice type 11

Résoudre l'équation $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$, sachant que la somme de deux des racines vaut -1.

Solution : Soient α, β et γ les trois racines de $P = X^3 - X^2 - X - 2$. On sait que $\alpha + \beta + \gamma = -\dfrac{-1}{1} = 1$ et par hypothèse (par exemple) que $\alpha + \beta = -1$. On a donc $\gamma = 2$. Mais on a aussi $\alpha\beta\gamma = -\dfrac{-2}{1} = 2$ d'où $\alpha\beta = 1$ et $\alpha + \beta = -1$. Ainsi α et β sont racines de $X^2 + X + 1 = 0$. On en déduit les trois racines

$$2,\ j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ et } j^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 1 *On désire résoudre le système* $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -12 \end{cases}$ *, où* $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$.

1. *On pose $P(X) = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$, développer P. Déterminer alors les racines de P et en déduire les solutions de $(\mathcal{S})$.*

Solution : On a $P(X) = X^3 - (\alpha+\beta+\gamma)X^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)X - \alpha\beta\gamma$. On sait déjà que

$$\alpha+\beta+\gamma = 0 \text{ et } \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = 3$$

D'où

$$P(X) = X^3 + 3X - \alpha\beta\gamma$$

Mais on a également $P(\alpha) = P(\beta) = P(\gamma) = 0$, ainsi

$$0 = P(\alpha) + P(\beta) + P(\gamma) = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 13(\alpha+\beta+\gamma) - 3\alpha\beta\gamma = -12 - 3\alpha\beta\gamma$$

ce qui donne $\alpha\beta\gamma = -4$ et

$$P(X) = X^3 + 3X + 4 = (X+1)\left(X^2 - X + 4\right)$$

Les solutions sont donc $(\alpha,\beta,\gamma) = \left(-1, \dfrac{1+i\sqrt{15}}{2}, \dfrac{1-i\sqrt{15}}{2}\right)$ à une permutation près.

Exercice 3

Soient α,β,γ les racines de l'équation $P = X^3 - 5X^2 + 6X - 1$. Déterminer la valeur exacte de

$$A = \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{1-\gamma}$$

Solution : Avant tout, 1 n'est pas racine de P, donc on pose $x = \dfrac{1}{1-\alpha}$, $y = \dfrac{1}{1-\beta}$ et $z = \dfrac{1}{1-\gamma}$ alors $\alpha = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$ (et de même avec β et γ). On a donc

$$P\left(\frac{x-1}{x}\right) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^3 - 5\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + 6\left(\frac{x-1}{x}\right) - 1 = 0$$

d'où

$$x^3 P\left(\frac{x-1}{x}\right) = (x-1)^3 - 5x(x-1)^2 + 6x^2(x-1) - x^3 = 0$$

et de même avec y et z. Ainsi x, y et z sont les racines de

$$Q(X) = (X-1)^3 - 5X(X-1)^2 + 6X^2(X-1) - X^3$$

On développe (en partie) Q pour avoir

$$\begin{aligned} Q(X) &= X^3 - 3X^2 - 5X^3 + 10X^2 + 6X^3 - 6X^2 - X^3 + R \text{ où } \deg R < 2 \\ &= X^3 + X^2 + R \end{aligned}$$

La somme des racines vaut donc $A = -1$.