Chapitre 16 : Espaces vectoriels

Exercice type 1

Soit $E=\mathbb{R}[X]$ et $F=\{P\in E,\ P(X)=XP'(X)+P(0)\}$, montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Solution : On a bien $F\subset E$. Si $P=0$ est le polynôme nul alors $P'(X)=0$ et $P(0)=0$, ainsi $P(X)=XP'(X)+P(0)$ donc $0\in F$ et ainsi $F\neq\varnothing$. Soient $(P,Q)\in F$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ alors

$$P(X)=XP'(X)+P(0)\text{ et }Q(X)=XQ'(X)+Q(0)$$

Posons $R=\lambda P+Q$ alors

$$\begin{aligned}R(X) &= \lambda P(X)+Q(X)=\lambda\left(XP'(X)+P(0)\right)+XQ'(X)+Q(0)\\ &= X(\lambda P+Q)'(X)+(\lambda P+Q)(0)=XR'(X)+R(0)\end{aligned}$$

Ainsi $R\in F$. Ceci prouve que F est bien un sous-espace vectoriel de E.

Exercice type 2

Soit $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $A\in E$ fixé et $F=\{M\in E,\ AM=MA\}$, montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Application : déterminer F si $A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$.

Solution : On a bien $F\subset E$ et si $M=0$ est la matrice nulle, alors $AM=MA=0$ donc $0\in F$ et ainsi $F\neq\varnothing$. Soient $(M,N)\in F^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ alors

$$AM=MA\text{ et }AN=NA$$

On pose $P=\lambda M+N$ alors $AP=A(\lambda M+N)=\lambda AM+AN=\lambda MA+NA=(\lambda M+N)A=PA$, ainsi $P\in F$, ce qui prouve que F est un sous-espace vectoriel de E.
Dans le cas où $A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$, si $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ alors $AM=MA\iff\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix}-b-c&a+2b-d\\a-2c-d&b+c\end{pmatrix}=0$. On obtient alors

$$\begin{cases}-b-c=0\\a+2b-d=0\\a-2c-d=0\\b+c=0\end{cases}\iff\begin{cases}c=-b\\a=-2b+d\end{cases}\iff M=\begin{pmatrix}-2b+d&b\\-b&d\end{pmatrix}$$

d'où

$$F=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

On peut vérifier que $F=\operatorname{Vect}(I_2,A)$, en effet $A=-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$.

Exercice type 3

Soit $E=\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que

$$F=\left\{f\in E,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \left(1+x^2\right)f''(x)+f'(x)-3f(x)=0\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

Solution : Par définition de F, on a $F \subset E$ (les éléments de F sont des fonctions de E). Puis $F \neq \varnothing$, la fonction nulle est dans F, en effet si $f = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f'(x) = f''(x)$ et ainsi $\left(1+x^2\right) f''(x) + f'(x) - 3f(x) = 0$.
Soient f et g dans F, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, a-t-on $\lambda f + \mu g \in E$.

$$\begin{aligned} f &\in F \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \left(1+x^2\right) f''(x) + f'(x) - 3f(x) = 0 \\ g &\in F \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \left(1+x^2\right) g''(x) + g'(x) - 3g(x) = 0 \end{aligned}$$

Posons $h = \lambda f + \mu g$, alors $h' = \lambda f' + \mu g'$ et $f'' = \lambda f'' + \mu g''$ ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \left(1+x^2\right) h''(x) + h'(x) - 3h(x) \\ = & \left(1+x^2\right)(\lambda f''(x) + \mu g''(x)) + (\lambda f'(x) + \mu g'(x)) + 3(\lambda f(x) + \mu g(x)) \\ = & \lambda\left(\left(1+x^2\right) f''(x) + f'(x) - 3f(x)\right) + \mu\left(\left(1+x^2\right) g''(x) + g'(x) - 3g(x)\right) \\ = & \lambda \times 0 + \mu \times 0 \text{ car } f \in F \text{ et } g \in F \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $h \in F$.
L'ensemble F est bien un sous-espace vectoriel de E.

Exercice type 4

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $F = \left\{P \in E,\ P(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 P(t)\,dt = 0\right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une famille génératrice.

Solution : Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$ un élément de E, alors

$$\begin{aligned} P \in F &\Longleftrightarrow \begin{cases} P(0) = a_0 = 0 \\ \displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = -\dfrac{2a_2}{3} - \dfrac{a_3}{2} \end{cases} \text{ où } a_2 \text{ et } a_3 \text{ sont quelconques dans } \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow \exists (a_2, a_3) \in \mathbb{R}^2,\ P = \left(-\frac{2a_2}{3} - \frac{a_3}{2}\right) X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \\ &\Longleftrightarrow \exists (a_2, a_3) \in \mathbb{R}^2,\ P = a_2\left(X^2 - \frac{2}{3}X\right) + a_3\left(X^3 - \frac{1}{2}X\right) \end{aligned}$$

On a donc prouvé que

$$F = \operatorname{Vect}(P_1, P_2) \text{ où } P_1 = X^2 - \frac{2}{3}X \text{ et } P_2 = X^3 - \frac{1}{2}X$$

En particulier F est un sous-espace vectoriel (comme tout vect digne de ce nom !) et (P_1, P_2) engendre F.
Remarque : On a même une base car la famille est échelonnée en degré donc libre.

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}^4$, on note $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $d = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. On pose $F = \operatorname{Vect}(a, b)$ et $G = \operatorname{Vect}(c, d)$, montrer que $F = G$.

Solution : Montrons que $F \subset G$. Il suffit de prouver que a et b sont dans G, i.e. qu'ils sont combinaisons linéaires de c et de d. Pour a, on cherche λ et μ réels tels que $a = \lambda c + \mu d$. Ceci donne le système $\begin{cases} \lambda + 2\mu = 3 \\ 5\lambda + 2\mu = 7 \\ 2\lambda - \mu = 1 \\ -2\lambda - 3\mu = -5 \end{cases} \Longleftrightarrow \lambda = \mu = 1$.

On cherche ensuite α et β réels tels que $b=\alpha c+\beta d$, ce qui donne $\left\{\begin{array}{c}\alpha+2\beta=-1\\ 5\alpha+2\beta=3\\ 2\alpha-\beta=3\\ -2\alpha-3\beta=1\end{array}\right. \iff \alpha=1$ et $\beta=1$. Il reste à prouver que $G\subset F$. Mais on a montré que

$$\left\{\begin{array}{l} a=c+d\\ b=c-d\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} c=\dfrac{a+b}{2}\\ d=\dfrac{a-b}{2}\end{array}\right. \Longrightarrow (c,d)\in F \Longrightarrow G\subset F$$

Exercice type 5

Soit $E=\mathbb{R}^3$, on pose $F=\{(x,y,z)\in E,\ x+y-z=0\}$ et $G=\mathrm{Vect}\,(1,1,1)$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel et que $E=F\oplus G$.

Solution : On a $(x,y,z)\in F \iff (x,y,z)=(x,y,x+y)=x\,(1,0,1)+y\,(0,1,1)$, ainsi $F=\mathrm{Vect}\,((1,0,1),(0,1,1))$ est une sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On va montrer que $E=F\oplus G$. Soit $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$, on cherche à décomposer $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{f}+\overrightarrow{g}$ de manière unique où $\overrightarrow{f}\in F$ et $\overrightarrow{g}\in G$.
Puisque $\overrightarrow{f}\in F\iff \exists\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{f}=\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{g}\in G\iff \exists\alpha\in\mathbb{R},\ \overrightarrow{g}=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, on cherche à montrer qu'il existe un unique triplet (λ,μ,α) tel que

$$\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\iff\left\{\begin{array}{c}\alpha+\lambda=a\\ \alpha+\mu=b\\ \alpha+\lambda+\mu=c\end{array}\right.$$

On résout donc le système par les matrices :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&a\\1&0&1&b\\1&1&1&c\end{array}\right)\underset{\substack{L_2-L_1\\L_3-L_1}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&a\\0&-1&1&b-a\\0&0&1&c-a\end{array}\right)$$

Le système admet donc toujours une unique solution. Ainsi $E=F\oplus G$.
Remarque : Si on termine la résolution, on a $\alpha=a+b-c$, $\lambda=c-b$ et $\mu=c-a$, ce qui donne la décomposition

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}&=(c-b)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+(c-a)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+(a+b-c)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\\&=\underbrace{\begin{pmatrix}c-b\\c-a\\2c-b-a\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{f}}+\underbrace{\begin{pmatrix}a+b-c\\a+b-c\\a+b-c\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{g}}\end{aligned}$$

Exercice type 6

Soit $E=\mathbb{R}\,[X]$, on pose $F=\{P\in E,\ P\,(0)=P'\,(1)=0\}$ et $G=\mathbb{R}_1\,[X]$, montrer que F un sous-espace vectoriel de E, puis que $E=F\oplus G$.

Solution : On a bien $F \subset E$, le polynôme nul est clairement dans F donc $F \neq \varnothing$. Puis si $(P,Q) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, avec $R = \lambda P + Q$, on a

$$R(0) = \lambda P(0) + Q(0) = 0 \text{ et } R'(1) = \lambda P'(1) + Q'(1) = 0$$

car P et Q sont dans F. Ainsi F est un sous-espace vectoriel de E.
Montrons que la somme est directe. On a déjà $F \cap G \subset \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Soit $Q \in F \cap G$ alors $\deg Q \leqslant 1$ car $Q \in G$. On peut écrire $Q = aX + b$. Puis $Q(0) = b = 0$ et $Q'(1) = A = 0$ car $Q \in F$. Conclusion $Q = 0$ et $F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.
Montrons que $E = F + G$ par analyse synthèse. On a déjà $F + G \subset E$.
Analyse : Soit $A \in E$, on suppose que $A = P + Q$ où $P \in F$ et $Q \in G$. On a $\deg Q \leqslant 2$, on écrit donc $Q = aX + b$. Puis

$$P = A - Q \in F \Longleftrightarrow P(0) = A(0) - b = 0 \text{ et } P'(1) = A'(1) - a = 0$$

On a donc

$$Q = A'(1)\,X + A(0) \text{ et } P = A - Q$$

(Au passage, cela prouve l'unicité de la décomposition donc la somme directe).
Synthèse : Si $Q = A'(1)\,X + A(0)$ et $P = A - Q$, alors $Q \in G$, $P \in F$ et $A = F + G$. Ainsi $E \subset F + G$ et $E = F \oplus G$.

Exercice type 7

Soit $F = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n\right\}$ et $G = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 2u_n\right\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'espace vectoriel des suites réelles. Montrer que si $u \in F \cap G$, alors u est constante en déduire que la somme $F + G$ est directe.

Solution : L'équation caractéristique d'une suite de F est $r^2 - r - 3 = 0$. Ses racines sont $r_1 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$. Ainsi

$$u \in F \Longleftrightarrow \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$$

Posons $R_1 = (r_1^n)_n$ et $R_2 = (r_2^n)_n$, alors R_1 et R_2 sont des vecteurs de F (pour R_1, prendre $(C_1, C_2) = (1,0)$, R_1 correspond donc au vecteur $\overrightarrow{i}$), et l'on a montré que

$$F = \operatorname{Vect}(R_1, R_2)$$

On procède de même avec G (puisque $r^2 - 2r - 2 = 0$ a pour racines $\rho_1 = 1 + \sqrt{3}$ et $\rho_2 = 1 - \sqrt{3}$), on pose $T_1 = (\rho_1^n)_n$ et $T_2 = (\rho_2^n)_n$, alors $G = \operatorname{Vect}(T_1, T_2)$. Ceci prouve que F et G sont bien des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Soit $u \in F \cap G$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n = 2u_{n+1} + 2u_n \Longrightarrow u_{n+1} + 3u_n = 2u_{n+1} + 2u_n \Longrightarrow u_{n+1} = u_n$. La suite est bien constante. Mais alors, $u_{n+2} = u_{n+1} = u_n$, ce qui donne, pusique $u \in F$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_n + 3u_n = 4u_n \Longrightarrow u_n = 0$$

La somme $F \oplus G$ est donc directe.

Exercice type 8

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions de E paires et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions de E impaires. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires.
Application : Déterminer les fonctions f dérivables deux fois sur $\mathbb{R}$ et telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + f(-x) = x$.

Solution : On a $\mathcal{P} = \{f \in E,\ \forall x \in E,\ f(x) = f(-x)\}$ et $\mathcal{I} = \{f \in E,\ \forall x \in E,\ f(x) = -f(-x)\}$. On a $\mathcal{P} \subset E$ et $\mathcal{I} \subset E$ (les éléments de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des fonctions de E). La fonction nulle (qui est le vecteur nul de E) est à la fois paire et impaire donc est dans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ (si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, alors $f(x) = f(-x) = -f(-x)$).
Enfin, soient f et g dans $\mathcal{P}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, posons $h = \lambda f + \mu g$, alors, puisque f et g sont paires

$$h(-x) = (\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = h(x)$$

ce qui prouve que $h \in \mathcal{P}$. Si f et g sont dans $\mathcal{I}$, on a $h(-x) = (\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = -\lambda f(x) - \mu g(x) = -h(x)$, ce qui prouve que $h \in \mathcal{I}$.
On a montré que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de E. Sont-ils supplémentaires ?
La somme est directe : En effet soit $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x) = -f(x)$ car f est paire et impaire, d'où $f(x) = -f(x) \Longrightarrow f(x) = 0$. Le seul vecteur de l'intersection est le vecteur nul

$$\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}, \text{ la somme est directe}$$

La somme $F + G$ est égale à E :
Il s'agit de prouver que toute fonction $f \in E$ peut s'écrire sous la forme $g + h$ où $g \in \mathcal{P}$ et $h \in \mathcal{I}$. On procède par analyse-synthèse.
Analyse : Si $f = g + h$ avec $g \in \mathcal{P}$ et $h \in \mathcal{I}$ alors, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = g(x) + h(x) \text{ et } f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$$

D'où

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Synthèse : On définit g et h par $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$. Il est clair que $g \in \mathcal{P}$, $h \in \mathcal{I}$ et $f = g + h$.
Remarque : Lors de l'analyse, on a prouvé que g et h sont uniques, ceci re-démontre que la somme est bien directe.
Pour l'application, on pose $f = g + h$ avec g paire et h impaire. Puisque f est dérivable deux fois, $x \longmapsto f(-x)$ aussi et ainsi g et h sont dérivables deux fois. De plus puisque $g(x) = g(-x)$, en dérivant on a $g'(x) = -g'(-x)$. La dérivée de g paire est donc impaire et de même la dérivée d'une fonction impaire est paire. En dérivant deux fois, on a g'' et h'' paires. On a alors

$$f''(x) + f(-x) = g''(x) + h''(x) + g(x) - h(x) = (g''(x) + g(x)) + (h''(x) - h(x)) = x$$

Ainsi puisque x est impaire, par unicité de la décomposition, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$g''(x) + g(x) = 0 \text{ et } h''(x) - h(x) = x$$

On résout les deux équations différentielles pour avoir $g(x) = A\cos x + B\sin x$ et $h(x) = C\operatorname{ch} x + D\operatorname{sh} x - x$. Mais puisque g est paire et h impaire, on a $B = C = 0$
Conclusion $f(x) = A\cos x + D\operatorname{sh} x - x$ où $(A, D) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice type 9

Dans $\mathbb{R}^4$, montrer que la famille formée des vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est libre.

Solution : On a $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2 - C_1 \\ C_3 - C_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_3 - C_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est de rang 3. La famille est donc libre.

Exercice type 10

Dans $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$, soit f, g et h les fonctions définies par $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$ et $h(x) = e^x$. Montrer que (f, g, h) est une famille libre.

Solution : Soient $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\alpha f+\beta g+\gamma h=0$.
Première méthode : On a donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $\alpha\cos x+\beta\sin x+\gamma e^x=0$. On spécialise en trois valeurs de $\mathbb{R}$, pour $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ et $x=-\frac{\pi}{2}$, on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{c}\alpha+\gamma=0\\ \beta+\gamma e^{\frac{\pi}{2}}=0\\ -\beta+\gamma e^{-\frac{\pi}{2}}=0\end{array}\right.$$

La matrice de ce système est $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&e^{\frac{\pi}{2}}\\0&-1&e^{-\frac{\pi}{2}}\end{pmatrix}\underset{L_3+L_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&e^{\frac{\pi}{2}}\\0&0&2\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}$ est de rang 3, ce système admet donc une unique solution qui est $\cdots$ clairement $\alpha=\beta=\gamma=0$.
Deuxième méthode : La fonction $x\longmapsto\alpha\cos x+\beta\sin x+\gamma e^x$ est donc la fonction nulle. Or si l'on calcule le DL à l'ordre 2 en 0 de cette fonction, on obtient

$$\alpha\left(1-\frac{x^2}{2}\right)+\beta x+\gamma\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)=0+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)$$

Par unicité du DL, on obtient alors

$$\left\{\begin{array}{lc}\alpha+\gamma=0&\text{coefficient constant}\\ \beta+\gamma=0&\text{coefficient en }x\\ \alpha-\gamma=0&\text{coefficient en }x^2\end{array}\right.\Longleftrightarrow\alpha=\beta=\gamma=0$$

Troisième solution : La fonction $x\longmapsto\alpha\cos x+\beta\sin x+\gamma e^x$ est donc la fonction nulle, donc, en divisant par e^x

$$\gamma+\alpha e^{-x}\cos x+\beta e^{-x}\sin x=0$$

Or si $\gamma\neq0$, puisque $\alpha e^{-x}\cos x+\beta e^{-x}\sin x\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ (bornée $\times$ tend vers 0), on a $\gamma+\alpha e^{-x}\cos x+\beta e^{-x}\sin x\xrightarrow[x\to+\infty]{}\gamma$.
Ainsi $\gamma=0$. Puis avec $x=0$, $\alpha=0$ et avec $x=\frac{\pi}{2}$ on conclut que $\beta=0$.

Exercice 2

Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ les familles suivantes sont-elles libres ?

- $\mathcal{B}_1=\left(x\longmapsto\sin^k(x)\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$.
- $\mathcal{B}_2=\left(x\longmapsto\cos^k(x)\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$.
- $\mathcal{B}_3=\left(x\longmapsto\sin(kx)\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$.
- $\mathcal{B}_4=\left(x\longmapsto\cos(kx)\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

Solution : Pour mémoire la fonction $f^0(x)$ est la fonction constante égale à 0.
Pour $\mathcal{B}_1$ ou $\mathcal{B}_2$, soient $(\lambda_0,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{k=0}^n\lambda_k\sin^k(x)=0$$

Si l'on pose $P=\sum_{k=0}^n\lambda_kX^k$, on en déduit que pour $x=\arcsin\theta$ où $\theta\in[-1,+1]$, on a $P(\sin(\arcsin\theta))=P(\theta)=0$. Ainsi, le polynôme P admet une infinité de racine donc a tous ses coefficients nuls. Ceci signifie que $\lambda_0=\cdots=\lambda_n=0$. La famille $\mathcal{B}_1$ est libre.
On procède de même, si $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^n\lambda_k\cos^k(x)=0$ en posant $x=\arccos\theta$, la famille $\mathcal{B}_2$ est libre.
Pour $\mathcal{B}_3$, la fonction $x\longmapsto\sin(0\times x)$ est la fonction nulle. La famille $\mathcal{B}_3$ est liée car elle contient le vecteur nul.
Pour $\mathcal{B}_4$, soient $(\lambda_0,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{k=0}^n\lambda_k\cos(kx)=0$$

Soit $p\in\{0,\cdots,n\}$ alors

$$0=\int_0^\pi\left(\sum_{k=0}^n\lambda_k\cos(kx)\right)\cos(px)\,dx=\sum_{k=0}^n\lambda_k\int_0^\pi\cos(kx)\cos(px)\,dx$$

Mais

$$\int_0^{\pi} \cos(kx)\cos(px)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[\cos((k+p)x)+\cos((k-p)x)\right]dx$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin((k+p)x)}{k+p}\right]_0^{\pi} + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin((k-p)x)}{k-p}\right]_0^{\pi} = 0 \text{ si } k\neq p \\[2ex] \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin((k+p)x)}{k+p}\right]_0^{\pi} + \dfrac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ si } k=p \end{cases}$$

Ainsi

$$\forall p\in\{0,\cdots,n\},\ \frac{\pi\lambda_p}{2}=0 \text{ et la famille est libre.}$$

Exercice type 11

Donner une base de $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x-y+z=0\right\}$.

Solution : On a $F=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ car $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in F\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\x+z\\z\end{pmatrix}$ avec $(x,z)\in\mathbb{R}^2$. La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est génératrice de F et libre (deux vecteurs non colinéaires de F), c'est une base de F.

Exercice 3

Dans $\mathbb{R}^4$, soient a,b,c et d les vecteurs définis par

$$a=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\-2\end{pmatrix},\ c=\begin{pmatrix}\alpha\\2\\1\\1\end{pmatrix},\ d=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Préciser si la famille (a,b,c,d) est libre ou liée, dans le dernier cas donner une relation de dépendance.

Solution : On a

$$\begin{pmatrix}1&-1&\alpha&2\\0&1&2&-1\\0&2&1&1\\1&-2&1&1\end{pmatrix}\underset{C}{\sim}\begin{array}{cccc} & {\scriptstyle C_2+C_1} & {\scriptstyle C_3-\alpha C_1} & {\scriptstyle C_4-2C_1}\\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&2&-1\\0&2&1&1\\1&-1&1-\alpha&-1\end{pmatrix}}\end{array}\underset{C}{\sim}\begin{array}{cccc} & {\scriptstyle C_2+C_1} & {\scriptstyle C_3-2C_2-(\alpha+2)C_1} & {\scriptstyle C_4+C_2-C_1}\\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&2&-3&3\\1&-1&3-\alpha&-2\end{pmatrix}}\end{array}$$

$$\underset{C}{\sim}\begin{array}{cccc} & {\scriptstyle C_2+C_1} & {\scriptstyle C_3-2C_2-(\alpha+2)C_1} & {\scriptstyle C_3-C_2+C_4-(\alpha+3)C_1}\\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&2&-3&0\\1&-1&3-\alpha&1-\alpha\end{pmatrix}}\end{array}$$

Si $\alpha\neq1$, la famille $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-3\\3-\alpha\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1-\alpha\end{pmatrix}$ est libre car le rang est égal à 4 (et (a,b,c,d) est une base de $\mathbb{R}^4$ car

il y a 4 vecteurs).
Si $\alpha = 1$,la famille (a, b, c, d) est liée car de rang est égal à 3 et ayant 4 éléments et la relation de dépendance linéaire est

$$c - b + d - 4a = \overrightarrow{0}$$