Chapitre 17 : Applications linéaires

Exercice type 1

Montrer que $f:\left|\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 & \\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y+z\\ y-z\\ x+2z\end{pmatrix}\end{array}\right.$ est linéaire, déterminer $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.

Déterminer $f(F)$ où $F=\left\{\begin{pmatrix} x, & y, & z\end{pmatrix}, x+2z=0\right\}$

Solution : Méthode de base : Soient $u=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\alpha\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(\alpha u+v) &= f\begin{pmatrix} \alpha x+x'\\ \alpha y+y'\\ \alpha z+z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\alpha x+x')+(\alpha y+y')+(\alpha z+z')\\ (\alpha y+y')-(\alpha z+z')\\ (\alpha x+x')+2(\alpha z+z')\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \alpha(x+y+z)+(x'+y'+z')\\ \alpha(y-z)+(y'-z')\\ \alpha(x+2z)+(x'+2z')\end{pmatrix}=\alpha f(u)+f(v)\end{aligned}$$

ainsi f est linéaire.

Méthode avec les matrices : On pose $M=\begin{pmatrix} 1&1&1\\ 0&1&-1\\ 1&0&2\end{pmatrix}$, ainsi $f\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=MX$ où $X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$. Si $X'=\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}$, alors $M(\lambda X+X')=\lambda MX+MX'$ ce qui prouve la linéarité.

Déterminons $\ker f$.

$$u=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\ker(f)\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x+y+z\\ y-z\\ x+2z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+y+z=0\\ y-z=0\\ x+2z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x=-2z\\ y=z\end{array}\right.$$

donc $\ker(f)=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}, x=-2z, y=z\right\}=\operatorname{Vect}\begin{pmatrix} -2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ est une droite vectorielle.

Déterminons $\operatorname{Im} f$. On a

$$v=\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}\in\operatorname{Im}(f)\Leftrightarrow\exists u=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix},\ v=f(u)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+y+z=a\\ y-z=b\\ x+2z=c\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x=a-b-2z\\ y=z+b\\ 0=b+c-a\end{array}\right.$$

ainsi v a un antécédant si et seulement si $b+c-a=0$. On peut donc affirmer que $\operatorname{Im}(f)=\left\{\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}, b+c-a=0\right\}=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right)$ est un plan.

Pour finir, F est un bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $F=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right)$.

Ainsi $f(F)=\operatorname{Vect}\left(f\begin{pmatrix} -2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1\\ -1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right)=\operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ est une droite.

Exercice type 2

Soit $A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$ et $f:\left|\begin{array}{c}\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\longrightarrow\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\\ M\longmapsto AM\end{array}\right.$. Montrer que $f\in\mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ déterminer $\ker f$, $\operatorname{Im} f$. Déterminer f^2, que pensez-vous du résultat ?

Solution : Soient $(M,N)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ alors $f(\lambda M+N)=A(\lambda M+N)=\lambda AM+AN=\lambda f(M)+f(N)$. Ainsi f est bien linéaire et est à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc $f\in\mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.
Si $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, on a $AM=\begin{pmatrix}a-c&b-d\\a-c&b-d\end{pmatrix}$. Ainsi $M\in\ker f\iff\begin{cases}a-c=0\\b-d=0\end{cases}\iff M=\begin{pmatrix}a&b\\a&b\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$. On a donc

$$\ker f=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

Pour $\operatorname{Im} f$, $N=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\in\operatorname{Im} f\iff\exists M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ tel que $AM+\begin{pmatrix}a-c&b-d\\a-c&b-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$. On obtient le système

$$\begin{cases}a-c=\alpha\\b-d=\beta\\a-c=\gamma\\b-d=\delta\end{cases}\iff\begin{cases}a=\alpha+c\\b=\beta+d\\\alpha=\gamma\\\beta=\delta\end{cases}$$

Il admet des solutions si et seulement si $\alpha=\gamma$ et $\beta=\delta$ donc si et seulement si $N=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\alpha&\beta\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$. On a donc $\operatorname{Im} f=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right)=\ker f$ Ceci est immédiat car $\operatorname{Im} f\subset\ker f$ (voir exo type suivant).

Exercice type 3

Soit E un $\mathbb{K}$ ev,et $(f,g)\in\mathcal{L}(E)^2$, montrer que : $g\circ f=0\Leftrightarrow\operatorname{Im}(f)\subset\ker(g)$.

Solution : On travaille par double implication.
$\Longrightarrow$: Hypothèse : $g\circ f=0$. On désire prouver que $\operatorname{Im} f\subset\ker g$.
Soit $y\in\operatorname{Im} f$. Par définition de l'espace image, $\exists x\in E$ tel que $y=f(x)$. Puisque $g\circ f=0$, on a $g(f(x))=\overrightarrow{0}$, soit $f(x)=y\in\ker g$. Ainsi $y\in\operatorname{Im} f\Longrightarrow y\in\ker g$. Ceci prouve bien que $\operatorname{Im} f\subset\ker g$.
$\Longleftarrow$: Hypothèse : $\operatorname{Im} f\subset\ker g$. Soit $x\in E$ alors $f(x)\in\operatorname{Im} f$ d'où $f(x)\in\ker g$, ainsi $g(f(x))=\overrightarrow{0}$. On a donc $\forall x\in E$, $g(f(x))=\overrightarrow{0}$, ce qui signifie que $g\circ f=0$.

Exercice type 4

E désigne ici un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E vérifiant l'égalité : $f^2-2f-3I=0$, où $f^2=f\circ f$ et I désigne l'application identité de E ($I=\mathrm{Id}_E$). On note g et h les éléments de $\mathcal{L}(E)$ définie par $g=f-3I$ et $h=f+I$. Déterminer $g\circ h$ et $h\circ g$. Montrer que $\ker g\oplus\ker h=E$. Montrer que f est un automorphisme et calculer f^{-1}.

Solution : Dans $\mathcal{L}(E)$, on a

$$\begin{aligned}g\circ h&=(f-3I)\circ(f+I)=f\circ f-3I\circ f+f\circ I-3I\circ I=f^2-2f-3I=0\\h\circ g&=(f+I)\circ(f-3I)=f\circ f+I\circ f-3f\circ I-3I\circ I=f^2-2f-3I=0\end{aligned}$$

Montrons ensuite que $\ker g\oplus\ker h=E$.
La somme est directe : Soit $\overrightarrow{x}\in\ker g\cap\ker h$, alors

$$g(\overrightarrow{x})=\overrightarrow{0}\text{ et }h(\overrightarrow{x})=\overrightarrow{0}$$

Or $g(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x}) - 3\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow f(\overrightarrow{x}) = 3\overrightarrow{x}$ et $h(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow f(\overrightarrow{x}) = -\overrightarrow{x}$, d'où $3\overrightarrow{x} = -\overrightarrow{x} \Longrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.
La somme remplit l'espace : Soit $\overrightarrow{x} \in E$, on cherche à décomposer $\overrightarrow{x}$ sous la forme

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \text{ avec } \overrightarrow{a} \in \ker g \text{ et } \overrightarrow{b} \in \ker h$$

Or on a vu que $g \circ h = 0$ et $h \circ g = 0$ d'où $\operatorname{Im} h \subset \ker g$ et $\operatorname{Im} g \subset \ker h$. Ceci permet de construire des éléments de $\ker g$ et $\ker h$, en effet

$$g(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x}) - 3\overrightarrow{x} \in \ker h \text{ et } h(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{x} \in \ker g$$

Mais

$$\overrightarrow{x} = \frac{(f(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{x}) - (f(\overrightarrow{x}) - 3\overrightarrow{x})}{4} = \frac{h(\overrightarrow{x})}{4} - \frac{g(\overrightarrow{x})}{4}$$

On pose donc $\overrightarrow{a} = \dfrac{h(\overrightarrow{x})}{4} \in \ker g$ (car $\ker g$ est un sous-espace vectoriel qui contient $h(\overrightarrow{x})$) et $\overrightarrow{b} = -\dfrac{g(\overrightarrow{x})}{4} \in \ker h$.
Pour finir, on a $f \circ \left(\dfrac{f-2I}{3}\right) = \left(\dfrac{f-2I}{3}\right) \circ f = I$ d'où f est un automorphisme et $f^{-1} = \left(\dfrac{f-2I}{3}\right)$.

Exercice 1

Dans l'exercice type , E désigne ici un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E vérifiant l'égalité : $f^2 - 2f - 3I = 0$. On note g et h les éléments de $\mathcal{L}(E)$ définie par $g = f - 3I$ et $h = f + I$, $G = \ker g$ et $H = \ker h$ alors, on a montré que $G \oplus H = E$.

1. Soit p la projection sur G de direction H et $q = I - p$, justifier que $f = 3p - q$.
2. Exprimer, pour $n \geqslant 1$, f^n uniquement à l'aide de p et de q.

Solution :

1. On a montré que $\forall \overrightarrow{x} \in E$, $\overrightarrow{x} = \underbrace{\dfrac{f(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{x}}{4}}_{\in G} + \underbrace{-\dfrac{f(\overrightarrow{x}) - 3\overrightarrow{x}}{4}}_{\in H}$, ainsi

$$p(\overrightarrow{x}) = \frac{f(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{x}}{4} \text{ et } q(\overrightarrow{x}) = -\frac{f(\overrightarrow{x}) - 3\overrightarrow{x}}{4}$$

d'où

$$\forall \overrightarrow{x} \in E,\ f(\overrightarrow{x}) = 3p(\overrightarrow{x}) - q(\overrightarrow{x})$$

2. Puisque $p \circ q = q \circ p = 0$, on peut appliquer le binôme. On en déduit que , $\forall n \geqslant 1$,

$$f^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3p)^k (-q)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (-1)^{n-k} \times p^k \circ q^{n-k}$$

Mais si $k \geqslant 1$ et $n - k \geqslant 1$, on a $p^k \circ q^{n-k} = p^{k-1} \circ \underbrace{p \circ q}_{=0} \circ q^{n-k-1} = 0$. Ainsi pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, le terme $p^k \circ q^{n-k}$ est nul. La somme se réduit donc à

$$\begin{aligned} f^n &= \binom{n}{0} 3^0 (-1)^{n-0} \times p^0 \circ q^{n-0} + \binom{n}{n} 3^n (-1)^{n-n} \times p^n \circ q^{n-n} \\ &= (-1)^n q^n + 3^n p^n \text{ car } p^0 = q^0 = Id \end{aligned}$$

Enfin, puisque $p \circ p = p$, par récurrence si $n \geqslant 1$, $p^n = p$ (c'est faux si $n = 0$) d'où

$$f^n = 3^n p + (-1)^n q \text{ si } n \geqslant 1 \text{ (encore vrai si } n = 0 \text{ car } p + q = Id)$$

Exercice type 5

Soit φ définie sur $E = \mathbb{R}_2[X]$ par $\varphi(P) = \left(X^2 - X + 1\right) P' - (2X-1)P + X^2 P(1)$. Justifier que φ est bien un automorphisme de E.

Solution : Si la linéarité de φ ne posera aucun problème, a priori, rien ne permet d'affirmer que $\varphi(P)$ est bien dans E, en effet si $\deg P = n$, alors $\left(X^2 - X - 1\right) P'$ et $(2X-1)P$ sont tous les deux de degré $n+1$.
Commençons par la linéarité, $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
& \left(X^2 - X + 1\right)(\lambda P + Q)' - (2X-1)(\lambda P + Q) + X^2 (\lambda P + Q)(1) \\
= \ & \lambda \left[\left(X^2 - X + 1\right) P' - (2X-1)P + X^2 P(1)\right] + \left[\left(X^2 - X + 1\right) Q' - (2X-1) Q + X^2 Q(1)\right] \\
= \ & \lambda \varphi(P) + \varphi(Q)
\end{aligned}$$

Il suffit donc de vérifier que $\varphi(1), \varphi(X)$ et $\varphi\left(X^2\right)$ ont bien dans $\mathbb{R}_2[X]$, ainsi par linéarité, on aura $\varphi\left(aX^2 + bX + c\right) \in \mathbb{R}_2[X]$. Or, en développant, on a

$$\varphi(1) = X^2 - 2X + 1,\ \varphi(X) = 1 \text{ et } \varphi\left(X^2\right) = 2X$$

Pour finir, on sait que $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$ est une base de E et puisque $f(\mathcal{B}) = \left(X^2 - 2X + 1, 1, 2X\right)$ est une base de E (échelonnée en degré si on change l'ordre), on peut affirmer que φ est un automorphisme de E.

Exercice 2

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = f^2 + f$, montrer que $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

Solution : La somme est directe $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$: Soit $\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x}) \in \operatorname{Im} f \cap \ker f$, il s'agit de prouver que $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$.
Pour utiliser $f^3 = f^2 + f$, on écrit que

$$f^2(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{y} + f(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{0} \text{ car } \overrightarrow{y} \in \ker f$$

d'où $f^3(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{y}$, mais

$$f^3(\overrightarrow{x}) = f(f(f(\overrightarrow{x}))) = f(f(\overrightarrow{y})) = f\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0}$$

Ainsi $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$.
La somme remplit l'espace $\ker f + \operatorname{Im} f = E$:
On sait que $f^3 = f^2 + f$, ainsi $f^2 + f - f^3 = 0 \Longrightarrow f \circ \left(f + Id_E - f^2\right) = 0$. Ceci nous fournit, pour $\overrightarrow{x} \in E$, un élément de $\ker f$. On a donc $\forall \overrightarrow{x} \in E$,

$$f\left(f(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{x} - f^2(\overrightarrow{x})\right) = \overrightarrow{0}$$

d'où

$$\overrightarrow{x} + f(\overrightarrow{x}) - f^2(\overrightarrow{x}) \in \ker f$$

Mais alors

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{x} &= \overrightarrow{x} + f(\overrightarrow{x}) - f^2(\overrightarrow{x}) + f^2(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{x}) \\
&= \underbrace{\overrightarrow{x} + f(\overrightarrow{x}) - f^2(\overrightarrow{x})}_{\in \ker f} + \underbrace{f(f(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{x})}_{\in \operatorname{Im} f}
\end{aligned}$$

est bien la somme d'un élément de $\ker f$ et d'un élément de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, on note $F = \{P \in E,\ P(1) = 0\}$ et pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, $G_\alpha = \operatorname{Vect}(X - \alpha)$. Pour quelles valeurs de α a-t-on $F \oplus G_\alpha = E$. Déterminer alors l'expression de la projection sur G_α.

Solution : Soit $P = a + bX + cX^2 \in E$, on a

$$P \in F \iff a+b+c=0 \iff a=-b-c \iff P = b(X-1) + c\left(X^2-1\right)$$

Ainsi

$$F = \text{Vect}\left((X-1), \left(X^2-1\right)\right)$$

Montrons alors que $E = F \oplus G_\alpha$ sauf pour une valeur de α (qui est $\alpha = 1$, car il est évident que dans ce cas, Vect $(X-1) \subset F \cap G_1 \neq \left\{\overrightarrow{0}\right\}$).
Soit $P = aX^2 + bX + c$, on cherche donc à décomposer P de manière unique sous la forme

$$\begin{aligned} P &= \underbrace{u(X-\alpha)}_{\in G_\alpha} + \underbrace{v(X-1) + w\left(X^2-1\right)}_{\in F} \\ &= wX^2 + (u+v)X - (\alpha u + v + w) \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, cela s'écrit

$$\begin{cases} w = a \\ u+v = b \\ \alpha u + v + w = -c \end{cases} \iff \begin{cases} w = a \\ u+v = b \\ \alpha u + v = -c-a \end{cases}$$

Le système (d'inconnues u et v) $\begin{cases} u+v=b \\ u\alpha + v = -c-a \end{cases}$ a pour matrice augmentée $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & b \\ \alpha & 1 & | & -c-a \end{pmatrix} \underset{L_2 - \alpha L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & b \\ 0 & 1-\alpha & | & -c-a-\alpha b \end{pmatrix}$. Si $\alpha \neq 1$, il admet toujours une unique solution. On a donc toujours une unique décomposition. Cela prouve que $E = F \oplus G_\alpha$.
Si $\alpha = 1$, on n'a pas de somme directe car $G_1 = \text{Vect}(X-1) \subset F \cap G_1$, les deux sous espaces sont supplémentaires (et la somme $F + G_1$ vaut F).
Enfin, pour obtenir la composante dans G_α on calcule u qui vaut $\dfrac{a+b+c}{1-\alpha} = \dfrac{P(1)}{1-\alpha}$. Si Π est la projection sur G_α (lorsque $\alpha \neq 1$) on a

$$\Pi : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \longmapsto & \dfrac{P(1)}{1-\alpha}(X-\alpha) \end{array} \right.$$

Remarque : Si $P \in F$, on a bien $\Pi(P) = 0$. Si $P \in G_\alpha$, $P(X) = \lambda(X-\alpha)$ et $\Pi(P) = \dfrac{\lambda(1-\alpha)}{1-\alpha}(X-\alpha) = P$.

Exercice type 6

Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y-z=0\right\}$ et $G = \text{Vect}(\overrightarrow{a})$ où $\overrightarrow{a} = (2,-1,0)$. Montrer que $E = F \oplus G$.

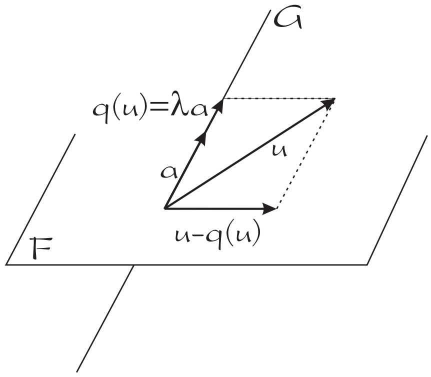
Déterminer l'expression de la projection sur F parallélement à G.

Solution : On a $F = \text{Vect}\left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ où $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dans $\mathbb{R}^3$, si $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est la base canonique, alors $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ a trois vecteurs et

$$\underset{\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)}{\text{Mat}} \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_2 - C_3}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_1 + C_2}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est de rang 3}$$

Ainsi $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ donc $\text{Vect}(\overrightarrow{a}) \oplus \text{Vect}\left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) = \mathbb{R}^3$.

Soit $\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, notons q la projection sur G parallélement à F et $q(\overrightarrow{u}) = q(x, y, z) = (X, Y, Z)$.



On a

$$(X, Y, Z) \in G \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, (X, Y, Z) = \lambda (2, -1, 0) = (2\lambda, -\lambda, 0).$$

et

$$(x, y, z) - q(x, y, z) = (x - X, y - Y, z - Z) \in F \Longleftrightarrow (x - X) + (y - Y) - (z - Y) = 0.$$

On remplace X, Y, Z par $2\lambda, -\lambda$ et 0 respectivement pour obtenir $\lambda = x + y - z$. On en déduit que $X = 2(x + y - z)$, $Y = -x - y + z$ et $Z = 0$. Enfin si p est la projection cherchée, on a $p + q = Id$ d'où

$$p(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} - q(\overrightarrow{u}) \Longleftrightarrow p\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - 2y + 2z \\ x + 2y - z \\ z \end{pmatrix}$$

On vérifie que $p(2, -1, 0) = (0, 0, 0)$, $p(1, 0, 1) = (1, 0, 1)$, $p(0, 1, 1) = (0, 1, 1)$ (pourquoi ces vecteurs ?, il s'agit des générateurs de F et de G). Moralité : On sait déterminer les projections sur les droites !

Exercice type 7

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2y \\ -2x + 4y \end{pmatrix}$$

Montrer que pour $k \geqslant 1$, $f^k = 3^{k-1} f$. On pose alors $g = f + I$ (où $I = Id_{\mathbb{R}^2}$) en déduire g^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution : On a $f^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} -x + 2y \\ -2x + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-x + 2y) + 2(-2x + 4y) \\ -2(-x + 2y) + 4(-2x + 4y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x + 6y \\ -6x + 12y \end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} -x + 2y \\ -2x + 4y \end{pmatrix}$ d'où $f \circ f = 3f$. Puis par récurrence sur $k \geqslant 1$, on montre que $f^k = 3^{k-1} f$. C'est vrai si $k = 1$, supposons que cela soit vrai à $k \geqslant 1$ fixé. Alors

$$f^{k+1} = f \circ f^k = f \circ \left(3^{k-1} f\right) = 3^{k-1}(f \circ f) = 3^{k-1} \times 3f = 3^k f$$

On a alors, pour $n \geqslant 1$, $g^n = (f + I)^n$, puisque $f \circ I = I \circ f$, on peut appliquer le binôme de Newton pour obtenir

$$\begin{aligned} g^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ I^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ I = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \text{ car } I^{n-k} = I \text{ et } f^k \circ I = f^k \\ &= \binom{n}{0} f^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^k = I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} f = I + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}\right) \times f \end{aligned}$$

Mais

$$(1+3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k = \binom{n}{0} 3^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3 \times 3^{k-1} = 1 + 3\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}\right)$$

d'où

$$g^n = I + \frac{4^n - 1}{3} f$$

Cette égalité est encore vraie si $n = 0$.

Exercice 4

Soit $p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $p\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \dfrac{x-z}{2} \\ 0 \\ \dfrac{-x+z}{2} \end{pmatrix}$ et $q = I_3 - p$.

1. Montrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$, déterminer sa base et sa direction.
2. On pose alors $f = p + 2I_3$, exprimer, pour $n \geqslant 1$, f^n uniquement à l'aide de p et de q.

Solution :

1. Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors $p(X) = AX$ où $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. On montre alors que f est linéaire car si $(X, Y) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda X + Y) = A(\lambda X + Y) = \lambda AX + AY = \lambda p(X) + p(Y)$$

Puis $p(p(X)) = A^2 X$, or un calcul simple donne $A^2 = A$ donc p est un projecteur.

Remarque : On peut aussi écrire que si $p\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x-z}{2} \\ 0 \\ \dfrac{-x+z}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ 0 \\ Z \end{pmatrix}$, alors

$$p\left(p\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{X-Z}{2} \\ 0 \\ \frac{-X+Z}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\frac{x-z}{2} - \frac{-x+z}{2}}{2} \\ 0 \\ \dfrac{-\frac{x-z}{2} + \frac{-x+z}{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x-z}{2} \\ 0 \\ \dfrac{-x+z}{2} \end{pmatrix}$$

Ceci prouve que p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.
On sait que la base est $\operatorname{Im} p = \ker q$, la direction est $\ker p$.

On a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker p \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{x-z}{2} \\ 0 \\ \dfrac{-x+z}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow x = z$, ainsi

$$\ker p = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ car } y \text{ est quelconque}$$

Pour la base, on utilise $q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - p\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dfrac{x-z}{2} \\ 0 \\ \dfrac{-x+z}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x+z}{2} \\ y \\ \dfrac{x+z}{2} \end{pmatrix}$. Ainsi $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in$ $\ker q \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{x+z}{2} \\ y \\ \dfrac{x+z}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$ d'où

$$\ker q = \operatorname{Im} p = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Remarque : on peut aussi utiliser $\operatorname{Im} p = \operatorname{Vect}\left(f\left(\overrightarrow{i}\right), f\left(\overrightarrow{j}\right), f\left(\overrightarrow{k}\right)\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Puisque $I = p + q$, on a $f = 3p + 2q$. Puis, on sait que $p \circ q = q \circ p = 0$, on peut donc appliquer le binôme de newton pour obtenir, si $n \geqslant 1$
$$f^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k p^k \circ 2^{n-k} q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k 2^{n-k} p^k \circ q^{n-k}$$
Mais pour $k \geqslant 1$ et $n - k \geqslant 1$ (i.e. $1 \leqslant k \leqslant n-1$), on a $p^k \circ q^{n-k} = p \circ p^{k-1} \circ q \circ q^{n-k-1} = 0$, ainsi
$$f^n = \binom{n}{0} 3^0 \times 2^n p^0 \circ q^{n-0} + \binom{n}{n} 3^n \times 2^0 p^n \circ q^{n-n} = 2^n q^n + 3^n p^n$$
Or $p \circ p = p$ d'où par récurrence, pour $n \geqslant 1$, on a $p^n = p$ (faux si $n = 0$, car $p^0 = I_3$). Conclusion
$$f^n = 2^n q + 3^n p \text{ si } n \geqslant 1\text{, c'est encore vrai si } n = 0 \text{ car } f^0 = I_3 = p + q$$